This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

182. b.
8.

DIE

POTENTIALFUNCTION

UND DAS

POTENTIAL.

EIN BEITRAG ZUR MATHEMATISCHEN PHYSIK

VON

D^R. R. CLAUSIUS,

PROFESSOR DER PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT UND AM EIDGENÖSSISCHEN POLYTECHNIKUM ZU ZÜRICH.

LEIPZIG,

VERLAG VON JOH. AMBR. BARTH.

1859.

182. h. 8

BIBLIOTHECA BODLEIANA
DOMINUS ILLUMINATIO MEA

Vorwort.

Die Potentialfunction, welche schon früher vielfach bei der Behandlung physikalischer Fragen angewandt wurde, gewinnt in neuerer Zeit immer mehr an Wichtigkeit, je mehr es gelingt, die physikalischen Erscheinungen aus den Wirkungen von Elementarkräften zu erklären und sie dadurch auf einfache mechanische Principien zurückzuführen. Ich brauche in dieser Beziehung nur an die schönen Untersuchungen von NEUMANN, KIRCHHOFF, HELMHOLTZ, W. THOMSON u. a. zu erinnern. Es ist aber, wie ich glaube, gegenwärtig für den Physiker nicht ganz leicht, sich über die Grundbegriffe dieser Theorie, über die Bedeutung und Eigenschaften der in ihr vorkommenden Grössen und über die Fälle, in welchen sie angewandt werden dürfen, zu belehren, weil er dieses nirgends vollständig zusammengestellt findet.

Die wichtigsten Arbeiten dieser Art, welche existiren, sind die Abhandlungen von Green[1]) und Gauss[2]). Indessen behandelt Green den allgemeinen Theil sehr kurz, und geht dann gleich zu Anwendungen auf Electricität und Magnetismus über. Gauss geht allerdings auf die Fundamentalsätze der Potentialtheorie specieller ein, es scheint mir aber, als ob einige der Beweise sich einfacher und anschaulicher führen lassen, als es bei ihm geschehen ist. Ausserdem wird ein Hauptbegriff, welcher sich in neuerer Zeit als ein wesentlicher Bestandtheil der Potentialtheorie herausgestellt hat, bei Green noch gar nicht und bei Gauss nur gelegentlich und unvollständig behandelt. Ich meine die Grösse, welche die mechanische Arbeit darstellt, und welche man aus der ursprünglich in der Potentialtheorie betrachteten Function durch Integration erhält. Diese Grösse, welche man zuweilen mit demselben Worte bezeichnet hat, wie die Function, aus der sie abgeleitet ist, muss doch von der letzteren wohl unterschieden werden, und ich habe daher schon in meinen früheren Arbeiten vorgeschlagen,

---

1) An Essay on the Application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism; by George Green. Nottingham 1828. Wieder abgedruckt in Crelle's Journ. B. 44 und 47.

2) Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte. Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839.

zur Vermeidung von Missverständnissen die beiden Namen Potentialfunction und Potential anzuwenden. Ferner ist bei der letzteren Grösse noch weiter das Potential einer Masse auf eine andere und das Potential einer Masse auf sich selbst zu unterscheiden.

Aus den angeführten Gründen schien es mit zeitgemäss zu sein, die Bedeutung der in der Potentialtheorie vorkommenden Grössen und ihre wichtigsten Eigenschaften im Zusammenhange und mit einiger Vollständigkeit darzustellen. Dabei werde ich aber auf die Anwendungen dieser Grössen, wie sie bei Gauss und Green vorkommen, theils um weitere allgemeine Sätze über die Wirkungen der anziehenden und abstossenden Kräfte aus ihnen abzuleiten, theils um das Verhalten der Electricität und des Magnetismus näher zu bestimmen, in dieser Schrift nicht eingehen, um ihre Grenzen nicht zu weit auszudehnen.

Wie man aus dieser Angabe des Zweckes ersehen kann, handelt es sich in der Schrift nicht darum, wesentlich neue Resultate mitzutheilen, sondern, was darin meiner Meinung nach als neu zu betrachten ist, ist nur die Art der Zusammenstellung und ein grosser Theil der Beweisführung. Wenn ich vielleicht an einigen Stellen in den Auseinandersetzungen etwas breiter bin, als für die

Mathematiker von Fach nothwendig wäre, so wird das wohl seine Entschuldigung darin finden, dass ich glaubte, dadurch den Physikern, welchen der Natur der Sache nach die mathematischen Operationen nicht so geläufig sein können, wie den eigentlichen Mathematikern, leichter verständlich zu werden.

Zürich, den 23. Januar 1859.

R. Clausius.

DIE
POTENTIALFUNCTION
UND DAS
POTENTIAL.

Berichtigungen.

S. 61, unterste Zeile der Anmerkung, ist zu lesen:

$$\frac{U}{R} \cdot \frac{dU}{ds} \quad \text{statt} \quad -\frac{U}{R} \cdot \frac{dU}{ds}$$

S. 73, unterste Zeile, ist im Nenner unter dem Integralzeichen zu lesen:

$$(u^2+z^2)^{\frac{3}{2}} \quad \text{statt} \quad (u^2+z^3)^{\frac{3}{2}}$$

I. Die Potentialfunction.

§. 1.

Um die Bedeutung der Potentialfunction und den Grund ihrer Einführung in die Mechanik und mathematische Physik klar zu erkennen, wird es zweckmässig sein, ein Wenig zurückzugreifen und zuerst eine allgemeine Function zu betrachten, welche dazu dient, bei einer grossen Klasse von mechanischen Kräften die zu ihrer Bestimmung nothwendigen Grössen auf eine einfache Weise darzustellen. Dann werden wir durch weitere Specialisirung der Kräfte auf naturgemässem Wege von selbst zu dem Begriffe der Potentialfunction gelangen.

§. 2.

Es sei ein beweglicher Punct p im Raume mit den Coordinaten x, y und z gegeben, auf welchen beliebige Kräfte wirken, die wir uns in eine Gesammtkraft P zusammengesetzt denken wollen. Diese Kraft wird, abgesehen davon, dass sie an einer bestimmten Stelle mit der Zeit veränderlich sein kann, auch für eine bestimmte Zeit im Allgemeinen an verschiedenen Stellen des Raumes verschieden sein. Um sie für alle Stellen des Raumes vollständig zu bestimmen, müssen drei Functionen der Raumcoordinaten gegeben sein, eine für die Grösse der Kraft und zwei für ihre Richtung. Denken wir uns die Gesammtkraft P in drei nach den Coordinatenrichtungen wirkende Componenten X, Y und Z zerlegt, so können wir auch sagen: zur vollständigen Bestimmung der Kraft müssen die drei Componenten als Functionen der Raumcoordinaten bekannt sein.

Diese drei Functionen können, wenn man nur von Kräften im Allgemeinen spricht, als ganz von einander unabhängig angesehen werden, indem sich aus jeden drei Componenten eine Kraft zusammensetzen lässt. Betrachtet man aber die in der Wirklichkeit vorkommenden Kräfte, so findet man, dass deren Componenten sehr häufig in einer eigenthümlichen Beziehung zu einander stehen, indem sie nämlich durch die drei Differentialcoefficienten einer und derselben Function der drei Raumcoordinaten dargestellt werden. Man kann also in solchen Fällen, wenn U diese Function bedeutet, schreiben:

$$(1) \qquad X = \frac{dU}{dx}\,; \quad Y = \frac{dU}{dy}\,; \quad Z = \frac{dU}{dz}\,.$$

Damit dieses möglich sei, müssen bekanntlich die Functionen X, Y und Z folgende Bedingungsgleichungen erfüllen:

$$(2) \qquad \frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}\,; \quad \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}\,; \quad \frac{dZ}{dx} = \frac{dX}{dz}\,.$$

Demnach bilden die Functionen dieser Art unter allen mathematisch möglichen Functionen nur einen sehr speciellen Fall. Dessenungeachtet ist dieser Fall bei der Betrachtung der Naturerscheinungen von der grössten Wichtigkeit, weil er, wie wir weiter unten sehen werden, eine Art von Kräften umfasst, welche schon bisher eine sehr bedeutende Rolle in der Physik spielten, und wahrscheinlich noch eine viel allgemeinere Bedeutung haben, als früher angenommen wurde.

§. 3.

Wenn diese Beziehung zwischen den Componenten der Kraft stattfindet, so wird dadurch die Betrachtung der Kraft und ihrer Wirkungen ausserordentlich erleichtert. Während man sonst drei einzeln gegebene Functionen in Rechnung zu bringen hat, hat man es jetzt nur mit einer solchen zu thun, aus welcher alle auf die Kraft bezüglichen Grössen auf einfache Weise abgeleitet werden können.

Wie man leicht sieht, wird unter Voraussetzung der Gleichungen (1) die ganze auf den Punct p wirkende Kraft P dargestellt durch:

$$(3)\qquad P=\sqrt{\left(\frac{dU}{dx}\right)^2+\left(\frac{dU}{dy}\right)^2+\left(\frac{dU}{dz}\right)^2}\,,$$

und die Winkel, welche diese Kraft mit den Coordinatenrichtungen bildet, und deren Cosinus a, b und c heissen mögen, werden bestimmt durch die Gleichungen:

$$(4)\qquad a=\frac{\frac{dU}{dx}}{P}\,;\quad b=\frac{\frac{dU}{dy}}{P}\,;\quad c=\frac{\frac{dU}{dz}}{P}\,.$$

Will man ferner von der Kraft P die in irgend eine vorgeschriebene Richtung s fallende Componente S haben, so lässt sich diese ebenfalls sehr einfach ausdrücken. Sei nämlich φ der Winkel, welchen die Richtung s mit der Richtung der Kraft bildet, so ist:

$$S = P\cos\varphi\,,$$

wofür man, wenn α, β und γ die Cosinus der Winkel sind, welche die Richtung s mit den Coordinatenrichtungen bildet, schreiben kann:

$$S = P(a\alpha + b\beta + c\gamma)\,.$$

Die drei Cosinus a, b und c sind schon durch die Gleichungen (4) bestimmt, und die drei anderen Cosinus lassen sich ebenfalls leicht ausdrücken. Bezeichnen nämlich in den Differentialcoefficienten $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ und $\frac{dz}{ds}$ die Zähler die Veränderungen, welche die Coordinaten des Punctes p dadurch erleiden, dass dieser in der Richtung s um das Stück ds verschoben wird, so ist:

$$(5)\qquad \alpha=\frac{dx}{ds}\,;\quad \beta=\frac{dy}{ds}\,;\quad \gamma=\frac{dz}{ds}\,.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe der sechs Cosinus geht die vorige Gleichung über in:

$$S=\frac{dU}{dx}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{dU}{dy}\cdot\frac{dy}{ds}+\frac{dU}{dz}\cdot\frac{dz}{ds}\,,$$

und in dieser Gleichung lässt sich die ganze rechte Seite durch den einfachen Differentialcoefficienten $\frac{dU}{ds}$ ersetzen, worin der Zähler dU die Veränderung bedeutet, welche U dadurch erleidet, dass der Punct p in der Richtung s um ds verschoben wird. Man erhält also:

$$S = \frac{dU}{ds} \tag{6}$$

d. h. es gilt für die beliebige Richtung s eine ebensolche Gleichung wie diejenigen, welche unter (1) für die drei Coordinatenrichtungen angenommen wurden.

§. 4.

Die Function U kann ferner dazu dienen, die Richtung und Grösse der Kraft an verschiedenen Stellen des Raumes geometrisch anschaulich darzustellen.

Schreiben wir:

$$U = A \ , \tag{7}$$

worin A irgend eine Constante bedeutet, so ist dieses die Gleichung einer Fläche. Durch Differentiation dieser Gleichung kommt:

$$\frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz}dz = 0 \ .$$

Hierin sind dx, dy und dz die Componenten einer kleinen Verschiebung ds, welche der Punct p, wenn er gezwungen ist, in jener Fläche zu bleiben, in derselben erleiden kann. Dividiren wir diese Gleichung durch P und ds, so kommt:

$$\frac{\frac{dU}{dx}}{P} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\frac{dU}{dy}}{P} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\frac{dU}{dz}}{P} \cdot \frac{dz}{ds} = 0 \ . \tag{8}$$

Die beiden Factoren jedes der drei Glieder, aus welchen hier die linke Seite besteht, stellen nach den Gleichungen (4) und (5) die Cosinus der Winkel dar, welche die Kraft P und die Verschiebung ds mit einer der Coordinatenrichtungen bilden. Demnach bedeutet die ganze linke Seite den Cosinus des Winkels zwischen der Kraft und der Verschiebung, und da dieser

Cosinus der Gleichung zufolge Null ist, so ist der Winkel ein rechter.

Dasselbe gilt für jede Verschiebung, welche der Punct p von seiner Anfangslage aus innerhalb der Fläche erleiden kann, und es folgt daraus, dass die an dieser Stelle wirkende Kraft auf der Fläche senkrecht ist; und ebenso verhält es sich natürlich auch an allen anderen Stellen der Fläche. Demnach hat die durch Gleichung (7) dargestellte Fläche die Eigenschaft, dass sie für alle in ihr gelegenen Puncte durch ihre Normalen die Richtungen der Kraft anzeigt. Sie spielt also in Bezug auf die betrachtete Kraft dieselbe Rolle, wie die Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit in Bezug auf die Schwerkraft, und man nennt sie daher eine Niveaufläche.

Fügt man zu der Constanten A noch eine unendlich kleine constante Grösse α hinzu, so stellt die dadurch entstehende neue Gleichung

$$U = A + \alpha$$

eine zweite Fläche dar, welche der ersten im Allgemeinen unendlich nahe liegt, und dieselben Eigenschaften hat, wie jene. Bezeichnen wir den senkrechten Abstand dieser beiden Flächen von einander an irgend einer Stelle mit ε, so ist der Bruch $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ offenbar nichts anderes als der Differentialcoefficient $\frac{dU}{dn}$, wenn n die an der betrachteten Stelle auf der ersten Fläche nach der zweiten hin errichtete Normale bedeutet. Dieser Differentialcoefficient stellt die in die Richtung der Normale fallende Componente der Kraft dar, und da dem Vorigen nach die ganze Kraft auf der Fläche senkrecht ist, so stellt der Differentialcoefficient, abgesehen vom Vorzeichen, die an dieser Stelle wirkende ganze Kraft dar. Ob das Vorzeichen des Differentialcoefficienten positiv oder negativ ist, d. h. ob die Kraft von der ersten zur zweiten Fläche geht, oder umgekehrt, hängt davon ab, ob für α eine positive oder negative Grösse gewählt ist. Setzen wir das Erstere voraus, so können wir schreiben:

(9) $$P = \frac{\alpha}{\varepsilon}.$$

In diesem Bruche ist nur ε von der Lage des betrachteten Punctes in der Fläche abhängig, während α constant ist, und es folgt daher, dass die Kraft an den verschiedenen Stellen der ersten Fläche dem Abstande der zweiten Fläche umgekehrt proportional ist.

Zugleich sieht man, dass, wenn die Kraft in der Fläche überall endlich ist, die beiden Flächen sich nicht schneiden können, weil für die Durchschnittslinie $\varepsilon = 0$ und somit P unendlich werden müsste.

Denkt man sich nun ein ganzes System solcher Flächen construirt, von denen jede sich von der vorhergehenden nur dadurch unterscheidet, dass die Constante um einen, in allen Fällen gleichen, unendlich kleinen Werth vergrössert ist, so lassen diese Flächen an jeder Stelle des Raumes durch ihre Richtung und ihren gegenseitigen Abstand die Richtung und Grösse der Kraft erkennen.

Man kann die Function U, welche dem Vorigen nach alle Elemente zur Bestimmung der Kraft auf eine so einfache Weise liefert, die Kraftfunction nennen.

§. 5.

Unter den Fällen, in welchen eine Kraftfunction existirt, ist der wichtigste der, wo die Kraft, welche auf den gegebenen Punct wirkt, sich zerlegen lässt in Centralkräfte, d. h. in anziehende oder abstossende Kräfte, welche von bestimmten Puncten des Raumes ausgehen, und um diese herum nach allen Seiten gleich stark wirken, so dass ihre Stärke nur von der Entfernung abhängt.

Sei p' mit den Coordinaten x', y' und z' ein solcher Punct, und bezeichnen wir den Abstand zwischen p und p' mit r, indem wir setzen:

$$(10) \qquad r = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2} \quad ,$$

so muss die Stärke der Kraft sich durch eine Function von r darstellen lassen, und sie sei mit $f(r)$ bezeichnet, wobei vorausgesetzt sein soll, dass ein positiver Werth dieser Function eine anziehende und ein negativer eine abstossende Kraft bedeute. Die Richtung der Kraft ist bestimmt durch die Lage der beiden Puncte zu einander, und zwar haben die Cosinus der Winkel, welche die positive Kraftrichtung mit den drei Coordinatenrichtungen bildet, folgende Werthe:

$$\frac{x'-x}{r}, \quad \frac{y'-y}{r}, \quad \frac{z'-z}{r} \quad .$$

Hieraus ergeben sich sofort die in die drei Coordinatenrichtungen fallenden Componenten der Kraft. Beschränken wir uns zunächst auf die in die x-Richtung fallende Componente, so ist diese:

$$X = f(r)\frac{x'-x}{r} \quad .$$

Nun ist aber nach (10):

$$\frac{dr}{dx} = -\frac{x'-x}{r} \quad ,$$

und dadurch geht die vorige Gleichung über in:

$$X = -f(r)\frac{dr}{dx} \quad .$$

Wir wollen nun eine neue Function von r einführen, welche das negative Integral der vorigen ist, indem wir setzen:

$$(11) \qquad F(r) = -\int f(r)dr \quad ,$$

woraus folgt:

$$\frac{dF(r)}{dr} = -f(r) \quad .$$

Dadurch, dass die Grösse r von den Coordinaten x, y, z des Punctes p abhängt, ist auch $F(r)$ mittelbar eine Function dieser drei Grössen, und wir können schreiben:

$$\frac{dF(r)}{dx} = \frac{dF(r)}{dr} \cdot \frac{dr}{dx} = -f(r)\frac{dr}{dx} \quad .$$

Der letzte Ausdruck ist derselbe, welchen wir vorher für die Componente X gefunden haben. Dasselbe, was für diese Componente gilt, gilt natürlich auch für die beiden anderen, und wir erhalten somit die Gleichungen:

$$(12) \qquad X = \frac{dF(r)}{dx}\ ; \quad Y = \frac{dF(r)}{dy}\ ; \quad Z = \frac{dF(r)}{dz}\ .$$

Man sieht hieraus, dass $F(r)$, als Function von x, y, z betrachtet, die Kraftfunction für den vorliegenden Fall ist.

Dieses Resultat lässt sich sogleich erweitern auf den Fall, wo gleichzeitig mehrere Puncte auf den gegebenen Punct p wirken. Sei p_1' ein zweiter Punct, sein Abstand vom Puncte p heisse r_1 und die von ihm ausgehende Kraft werde ihrer Stärke nach durch die Function $f_1(r_1)$ ausgedrückt; so bilden wir zunächst die Function:

$$F_1(r_1) = -\int f_1(r_1)dr_1$$

und können dann die nach der x-Axe gehende Componente dieser Kraft durch $\frac{dF_1(r_1)}{dx}$ darstellen. Dasselbe gilt für einen dritten, vierten etc. Punct, und man erhält daher, wenn eine beliebige Anzahl von Puncten wirkt, für die nach der x-Axe gehende Componente der Gesammtkraft einen Ausdruck von folgender Form:

$$X = \frac{dF(r)}{dx} + \frac{dF_1(r_1)}{dx} + \frac{dF_2(r_2)}{dx} + \text{etc.}$$
$$= \frac{d}{dx}\left[F(r) + F_1(r_1) + F_2(r_2) + \text{etc.}\right]$$

oder wenn man die Summe von Functionen unter ein Summenzeichen zusammenfasst:

$$X = \frac{d}{dx}\,\Sigma F(r)\ .$$

Ganz entsprechende Ausdrücke gelten natürlich für die beiden anderen Componenten, wobei die Summe von Functionen für alle drei Fälle dieselbe bleibt. Von den in dieser vorkommenden Grössen r, r_1, r_2 etc. enthält jede die Componenten eines der wirksamen Puncte, und ausserdem enthalten alle die Componenten x, y und z des Punctes p, welcher die Wirkung erleidet. Wir können also, ebenso wie jede einzelne der Functionen, so auch ihre Summe als eine Function von x, y und z betrachten, und wollen zur Abkürzung setzen:

$$U = \Sigma F(r) \quad . \tag{13}$$

Dann ist:

$$X = \frac{dU}{dx} \; ; \quad Y = \frac{dU}{dy} \; ; \quad Z = \frac{dU}{dz} \; , \tag{14}$$

und U ist somit die Kraftfunction.

§. 6.

Wir wollen nun unsere Annahmen über die Kraft noch weiter specialisiren.

Die Anziehungs- und Abstossungskräfte, von welchen vorher nur vorausgesetzt wurde, dass sie sich durch irgend welche Functionen der Entfernungen darstellen lassen, sollen den Quadraten der Entfernungen umgekehrt proportional sein.

Ferner wollen wir nicht blos von Puncten sprechen, welche anziehend oder abstossend auf einander wirken, sondern annehmen, dass sich in diesen Puncten irgend etwas befinde, was die Wirkung ausübe und erleide. Es kann dieses z. B. ponderable Masse sein, welche nach dem gewöhnlichen Gravitationsgesetze anziehend wirkt, oder Electricität, oder Magnetismus. Da wir über die Natur der letzteren nichts Zuverlässiges wissen, und es ausserdem zweckmässig ist, der Darstellung eine solche Allgemeinheit zu geben, dass sie auch andere noch unbekannte Fälle umfassen kann, wollen wir die Benennung so wählen, dass nichts Hypothetisches darin liegt, sondern nur die Fähigkeit eine Wirkung auszuüben, darin angedeutet ist. Dazu scheint mir das auch sonst gebräuchliche Wort Agens sehr geeignet. Von einem Agens soll nur vorausgesetzt werden, dass es sich der Quantität nach bestimmen lasse, und dass die Kraft, welche eine gewisse Menge eines Agens ausübt, unter sonst gleichen Umständen der Menge proportional sei.

Soweit es bisjetzt bekannt ist, üben nur Agentien von gleicher Art eine solche Anziehung oder Abstossung, wie sie den obigen Gesetzen entspricht, auf einander aus. So wirkt ponderable Masse auf ponderable Masse, Electricität auf Electricität, Magnetismus auf Magnetismus, und in solchen Fällen, wo scheinbar ungleichartige Agentien in derselben Weise auf einander wirken, bleibt wenigstens immer die Möglichkeit, dass die Ungleichartigkeit nur eine äusserliche und nicht im Wesen selbst begründete ist. Dessenungeachtet ist es nicht nothwendig, unsere Formeln von vorne herein auf gleichartige Agentien zu beschränken, denn diese Beschränkung kann sehr leicht nachträglich hinzugefügt werden.

Es seien also irgend zwei Mengen[1]) von aufeinander wirkenden Agentien gegeben, von denen vorläufig angenommen werden soll, dass sie in bestimmten Puncten p und p' concentrirt seien. Die im Puncte p befindliche Menge, nach irgend einer Einheit gemessen, heisse q, und die im Puncte p' befindliche Menge, welche, wenn sie demselben Agens angehört, natürlich auch nach derselben Einheit gemessen wird, im anderen Falle aber eine besondere Einheit hat, heisse q'. Die Kraft, welche diese beiden Mengen auf einander ausüben, lässt sich den gemachten Annahmen nach darstellen durch die Formel:

$$(15) \qquad f(r) = e\,\frac{q \cdot q'}{r^2}\,,$$

worin e eine Grösse ist, die von der Natur der Agentien, und von den gewählten Einheiten abhängt. Dadurch, dass dieser Coefficient positiv oder negativ sein kann, wird der Unterschied zwischen Anziehung und Abstossung ausgedrückt. Führt man

---

1) Ich vermeide absichtlich das Wort Masse, weil man mit diesem Begriffe die Vorstellung des Beharrungsvermögens verbindet, und die Grösse des Beharrungsvermögens als Maass der Masse nimmt, während mit dem Begriffe eines wirksamen Agens das Beharrungsvermögen nicht nothwendig verbunden zu sein braucht, und in den Fällen, wo es vorhanden ist, die Einheit des Beharrungsvermögens eine andere sein kann, als diejenige, nach welcher man misst, wenn es sich um die Bestimmung der ausgeübten Kraft handelt.

diese Formel in die Gleichung (11) zur Bestimmung der Kraftfunction ein, so kommt:

$$(16) \qquad F(r) = -\int e \frac{q \cdot q'}{r^2} dr = e \frac{q \cdot q'}{r} .$$

Denken wir uns nun, dass auf die Menge q nicht blos Eine sondern mehrere Mengen q', q'_1, q'_2 etc. wirken, welche unter sich gleichartig oder ungleichartig sein können, so ist, wenn wir zunächst der Allgemeinheit wegen das letztere voraussetzen, und daher die Coefficienten e als ungleich betrachten, die gesammte Kraftfunction:

$$U = q\left(e\frac{q'}{r} + e_1\frac{q'_1}{r_1} + e_2\frac{q'_2}{r_2} + \text{etc.}\right)$$

$$(17) \qquad = q\sum e\frac{q'}{r} .$$

Sind dagegen die wirksamen Mengen unter sich gleichartig, so hat e für alle denselben Werth und kann daher aus dem Summenzeichen herausgenommen werden, also:

$$(18) \qquad U = qe\sum\frac{q'}{r} .$$

Wenn das wirksame Agens nicht, wie bisher angenommen wurde, in einzelnen Puncten concentrirt ist, sondern einen Raum stetig ausfüllt, so denken wir es uns in Elemente dq' zertheilt, und beziehen den Abstand r auf jedes Element, oder strenger ausgedrückt, auf irgend einen Punct jedes Elementes, wodurch die Summe in ein Integral übergeht, nämlich:

$$(19) \qquad U = qe\int\frac{dq'}{r} .$$

Dass diese Umwandlung des vorigen Ausdruckes zulässig ist, ohne dass er dadurch seine Bedeutung als Kraftfunction verliert, ist unmittelbar klar, solange sich der Punct p ausserhalb des von dem wirksamen Agens ausgefüllten Raumes befindet, so dass für kein Element dq' der Abstand r gleich Null oder auc nur mit den Dimensionen des Elementes vergleichbar wird. In diesem Falle kann man sich nämlich jedes Element des Agens, welches ein Raumelement ausfüllt, in irgend einem Puncte dieses Raumelementes concentrirt denken, ohne dass dadurch die Wirkung, welche das Element auf p ausübt, merklich verändert wird. Für den anderen Fall, wo p sich innerhalb jenes Raumes befindet, soll die Gültigkeit des Ausdruckes (19) als Kraftfunction weiterhin noch besonders bewiesen werden, und wir wollen ihn vorläufig auch für diesen Fall als richtig gelten lassen.

Der Ausdruck (19) ist allgemeiner als der Ausdruck (18), und umfasst den letzteren, indem die Integration sich auch ausführen lässt, wenn endliche Mengen in einzelnen Puncten concentrirt sind.

§. 7.

Fügen wir nun endlich zu den bisher gemachten Annahmen noch folgende zwei hinzu: 1) dass auch das im Puncte p befindliche Agens, welches die Wirkung erleidet, von derselben Art sei, wie das, welches die Wirkung ausübt, und 2) dass die Menge desselben nicht beliebig, sondern eine Einheit sei, so ist die so vereinfachte Kraftfunction diejenige, welche wir Potentialfunction nennen. Bezeichnen wir diese zum Unterschiede mit V, und wählen wir für den im Vorigen mit e bezeichneten Coefficienten in diesem Falle den Buchstaben ε, so ist, jenachdem das wirksame Agens in einzelnen Puncten concentrirt oder stetig durch einen Raum verbreitet ist, zu setzen:

$$\text{(I)} \qquad \left\{ \begin{aligned} V &= \varepsilon \sum \frac{q'}{r} \\ V &= \varepsilon \int \frac{dq'}{r} \,. \end{aligned} \right.$$

Wir können demnach den Begriff der Potentialfunction folgendermaassen definiren. Die Kraftfunction eines Agens, welches nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernung anziehend oder abstossend wirkt, bezogen auf eine in einem Puncte concentrirt gedachte Einheit desselben Agens, heisst Potentialfunction.

Hieraus folgt, dass die Differentialcoefficienten

$$\frac{dV}{dx}, \quad \frac{dV}{dy}, \quad \frac{dV}{dz}$$

die drei Componenten derjenigen Kraft darstellen, welche das Agens auf eine im Puncte x, y, z gedachte Einheit desselben Agens ausüben würde. Befindet sich in diesem Puncte wirklich die Menge q des Agens, so sind die Componenten der auf diese ausgeübten Kraft:

$$q\frac{dV}{dx}, \quad q\frac{dV}{dy}, \quad q\frac{dV}{dz}.$$

Man sieht, dass zwischen diesen drei Grössen und den vorigen der Unterschied stattfindet, welchen man bei ponderablen Massen mit den Worten beschleunigende und bewegende Kraft ausdrückt.

§. 8.

Um mit Hülfe der Gleichungen (I) die Potentialfunction für die verschiedenen Fälle, auf welche sie Anwendung findet, berechnen zu können, braucht nur noch angegeben zu werden, wie bei verschiedenen Agentien die Mengen gemessen werden müssen, und wie sich die Grösse ε dabei verhält.

Bei ponderablen Massen, welche sich nach dem Gravitationsgesetze anziehen, ist über die Art, wie die Massen in Rechnung zu bringen sind, keine besondere Bemerkung nöthig. Die Grösse ε ist für diesen Fall positiv.

Bei der Electricität unterscheidet man bekanntlich zwei Arten, welche die Eigenschaft haben, dass Mengen derselben Art sich unter einander abstossen, dagegen Mengen verschiedener Art sich anziehen. Ob die beiden Electricitäten wirklich als zwei verschiedene für sich bestehende Agentien zu betrachten sind, oder ob die Erscheinungen sich auch aus dem Vorhandensein eines einzigen Agens erklären lassen, ist für unsere jetzigen Untersuchungen gleichgültig. In ihnen kommt es nur darauf an, die Electricität in solcher Weise in die Formeln einzuführen, dass dadurch die von ihr ausgeübten Kräfte richtig dargestellt werden. Die so gebildeten mathematischen Ausdrücke behalten ihre Gültigkeit, auch wenn man die Vorstellung über das Wesen der Electricität ändert. Um alle bei der Electricität vorkommenden Kräfte, obwohl sie in manchen Fällen anziehend und in anderen abstossend sind, doch unter eine gemeinsame Formel zusammenfassen zu können, in welcher ε immer dasselbe Vorzeichen behält, hat man den Unterschied des Vorzeichens auf die Electricitätsmengen selbst übertragen, indem man die Mengen der einen Electricität als positive und die der anderen als negative Grössen in Rechnung bringt. Dann wird die Kraft, welche irgend zwei in zwei Puncten concentrirte Electricitätsmengen q und q' auf einander ausüben, durch die Formel:

$$\varepsilon \frac{q \cdot q'}{r^2}$$

dargestellt, worin ε eine unveränderliche Grösse ist, und zwar eine negative Grösse, weil in dem Falle, wo q und q' gleiche Vorzeichen haben, der ganze Ausdruck negativ werden muss, wie es der Abstossung entspricht.

Bei dieser Art die Mengen der beiden verschiedenen Electricitäten in Rechnung zu bringen, kann man die Electricität im Ganzen ein abstossendes Agens nennen, weil bei der Benennung das Verhalten positiver Mengen maassgebend ist, und die Aenderungen, welche die Kraft dadurch erleidet, dass eine oder beide Mengen negativ werden, sich von selbst verstehen. Will man für irgend welche, theils positive, theils negative Electricitätsmengen die Potentialfunction bestimmen, so kann man das in der Gleichung (I) vorkommende Integral über alle gegebenen Electricitätsmengen ausdehnen, indem man die Elemente dq' je nach der Art der betreffenden Electricitätsmengen positiv oder negativ nimmt. Die so erhaltene Potentialfunction bezieht sich dann auf eine im Puncte p gedachte Einheit positiver Electricität.

Bei der Bestimmung magnetischer Kräfte kann man ebenfalls, ohne über die wirkliche Natur des Magnetismus irgend eine Annahme zu machen, Nordmagnetismus und Südmagnetismus als zwei Agentien betrachten, die sich in Bezug auf ihre gegenseitigen Einwirkungen wie die beiden Electricitäten verhalten. Wir bringen die Mengen des einen, z. B. des Nordmagnetismus, als positive und die des anderen als negative Grössen in Rechnung; dann behält ε einen unveränderlichen Werth, und die Potentialfunction, welche wir bekommen, bezieht sich auf eine im Puncte p gedachte Einheit von Nordmagnetismus.

Die Grösse ε ist in allen diesen Fällen die Anziehungskraft, welche zwei Einheiten des betreffenden Agens in der Einheit der Entfernung aufeinander ausüben, wobei eine Abstossungskraft als negative Anziehungskraft gerechnet wird. Wenn bei einem Agens die Einheit, welche als Maass dient, nicht im Voraus gegeben ist, sondern willkürlich gewählt werden kann, so lässt sich dadurch noch eine Vereinfachung erreichen. Wählt man nämlich als Einheit des Agens diejenige Menge, welche auf eine gleich grosse Menge desselben Agens in der Einheit der Entfernung die Einheit der Kraft ausübt, so ist der absolute Werth von ε gleich Eins, und was das Vorzeichen anbetrifft, so ist bei ponderabler Masse zu setzen $\varepsilon = +1$, dagegen bei Electricität und Magnetismus $\varepsilon = -1$. Wir wollen indessen vorläufig über die Einheiten der Agentien keine bestimmten Annahmen machen, und daher das allgemeine Zeichen ε beibehalten.

§. 9.

Bevor wir zur weiteren Behandlung unserer Function schreiten, müssen noch erst ein Paar Bemerkungen über den Namen und das Vorzeichen derselben eingeschaltet werden.

Der Name Potentialfunction ist von Green eingeführt. Gauss, welcher später dieselbe Function ebenfalls einer speciellen Betrachtung unterwarf, nannte sie kürzer Potential. Ich habe aber die ältere Bezeichnung, Potentialfunction, beibehalten, weil das Wort Potential noch für einen anderen Begriff gebraucht wird, der dem vorigen zwar verwandt aber nicht gleich ist. Ich glaube dass diese Unterscheidung sich im zweiten Abschnitte dieser Schrift, welcher vom Potential handelt, hinlänglich rechtfertigen wird.

Was ferner das Vorzeichen der Potentialfunction anbetrifft, so macht Gauss bei der Bildung der letzteren zwischen anziehenden und abstossenden Agentien keinen Unterschied, indem er in seinen Ausdruck der Potentialfunction den Factor ε, welcher positiv oder negativ sein kann, und dadurch jene beiden Fälle unterscheidet, nicht aufgenommen hat. Dadurch wird es aber nothwendig, jene Unterscheidung an einer anderen Stelle, nämlich bei der Ableitung der Kraftcomponenten aus der Potentialfunction zu machen, indem man nicht ohne Weiteres die Differentialcoefficienten der Potentialfunction als Ausdrücke der Kraftcomponenten betrachten darf, sondern die Differentialcoefficienten noch erst mit dem positiven oder negativen Vorzeichen versehen muss, jenachdem das wirksame Agens ein anziehendes oder abstossendes ist. Dieses scheint mir aber nicht zweckmässig zu sein. Da die eigentliche Bedeutung der Potentialfunction darin liegt, alles, was zur Bestimmung der Kraft nöthig ist, auf eine einfache Weise darzustellen, und sie nur ein specieller Fall der allgemeineren Kraftfunction ist, so halte ich es für angemessener, den Unterschied, ob das wirksame Agens ein anziehendes oder abstossendes ist, schon bei der Bildung der Potentialfunction selbst zu berücksichtigen, so dass die Ableitung der Kraftcomponenten aus der Potentialfunction immer in derselben Weise geschehen kann.

Wird dieses als zweckmässig zugestanden, so bleibt nur noch die Frage zu entscheiden, ob man es so einrichten soll, dass man, um die Componenten der Kraft, welche die im Puncte p gedachte positive Einheit des Agens erleidet, auszudrücken, nur die einfachen Differentialcoefficienten ohne ein äusserlich hinzugefügtes Vorzeichen anzuwenden braucht, oder so, dass man die Differentialcoefficienten zu diesem Zwecke erst mit dem negativen Vorzeichen versehen muss. Bei dieser Frage schien es mir nicht zweifelhaft zu sein, dass die erstere Bestimmungsar den Vorzug verdiene, und demgemäss ist im Obigen das Vorzeichen von ε gewählt worden, nämlich für anziehende Agentien das positive und für abstossende das negative.

Dabei konnte ich mir freilich nicht verhehlen, dass eine gewisse Unbequemlichkeit für die Anschauung darin liegt, dass bei der Electricität und dem Magnetismus für positive Mengen des wirksamen Agens die Potentialfunction negativ wird, und umgekehrt; indessen glaube ich, dass man bei einer Function, welche eine so allgemeine Bedeutung hat, wie die Potentialfunction, mehr darauf achten muss, sie überall, wo sie Anwendung findet, nach denselben allgemeinen Principien zu behandeln, als darauf, sie für einzelne specielle Fälle bequem einzurichten.

§. 10.

In §. 6 wurde gesagt, dass es nicht unmittelbar klar sei, ob die durch Gleichung (19) bestimmte Function U auch für den Fall, **wenn der Punct p sich innerhalb des von dem wirksamen Agens stetig ausgefüllten Raumes befindet**, die Eigenschaft habe, durch ihre Differentialcoefficienten die Kraftcomponenten darzustellen, und dasselbe gilt natürlich auch von der in §. 7 betrachteten, durch die zweite der Gleichungen (I) bestimmten Function V. Wir wollen daher diesen Fall jetzt näher untersuchen, wobei wir uns aber, da die beiden Functionen sich in dieser Beziehung ganz gleich verhalten müssen, auf Eine von ihnen beschränken können, wozu wir die Potentialfunction V wählen wollen.

In der unter (I) gegebenen Formel der Potentialfunction:

$$\varepsilon\int\frac{1}{r}\,dq'$$

ist die zu integrirende Function $\frac{1}{r}$ für diejenigen Elemente dq', welche den betrachteten Punct unmittelbar umgeben, unendlich gross, weil der Abstand r für dieselben unendlich klein ist, und derselbe Umstand findet, wie wir gleich nachher sehen werden, in noch höherem Grade bei den Formeln statt, welche man erhält, wenn man die Kraftcomponenten entweder direct oder durch Differentiation der Potentialfunction bestimmen will. Nun ist freilich daraus, dass die zu integrirende Function für gewisse Elemente unendlich gross wird, noch nicht zu schliessen, dass auch das Integral selbst unendlich gross oder unbestimmt werden müsse, denn es kann sein, dass die Summe derjenigen Elemente, für welche die zu integrirende Function einen unendlich grossen Werth von einer gewissen Ordnung annimmt, selbst eine unendlich kleine Grösse von noch höherer Ordnung ist, so dass der Einfluss dieser Elemente verschwindet, und das ganze Integral einen bestimmten endlichen Werth behält. Indessen darf man ein solches Verhalten doch nicht ohne Weiteres voraussetzen, sondern muss bei jedem derartigen Integrale, bevor man es zu weiteren Rechnungen anwendet, durch besondere Betrachtungen darüber entscheiden, ob die Integration in der Weise ausführbar ist, dass sie einen bestimmten endlichen Werth liefert. Dazu dient besonders das Verfahren, durch Einführung anderer Veränderlicher das Integral so umzuformen, dass die nun zu integrirende Function für alle Elemente dieser neuen Veränderlichen endlich bleibt, wodurch dann die bestimmte Ausführbarkeit der Integration ausser Zweifel gesetzt ist.

Dieses Verfahren wollen wir zunächst auf die Potentialfunction, und dann auf die Kraftcomponenten und die Differentialcoefficienten der Potentialfunction anwenden.

Wir wollen dabei der Kürze wegen den von dem Agens stetig erfüllten Raum einen Körper nennen, wobei wir aber unter dem Inhalte des Körpers nur dasjenige Agens verstehen, für welches wir die Potentialfunction bestimmen wollen, und alles, was sonst noch in dem Körper sein mag, unberücksichtigt lassen. Sei k die Dichtigkeit des Körpers bei dem Puncte x', y', z', mit der Bedeutung, dass, wenn $d\tau$ ein Raumelement vorstellt und dq' die Menge des darin enthaltenen wirksamen Agens ist, man hat:

$$(20) \qquad dq' = k d\tau \ ,$$

wobei wir annehmen wollen, dass die Grösse k, welche eine Function von x', y', z' ist, nirgends unendlich gross werde.

Um für das Raumelement einen für unseren Zweck passenden Ausdruck zu gewinnen, wollen wir um den betrachteten Punct p Polarcoordinaten einführen. Wir theilen zunächst den Raum in unendlich schmale Pyramiden ein, welche ihre Spitzen sämmtlich in dem Puncte p haben. Denken wir uns um p als Mittelpunct eine Kugelfläche mit der Längeneinheit als Radius beschrieben, so schneidet jede Elementarpyramide aus derselben ein Flächenelement aus, welches $d\sigma$ heissen möge. Die Grösse dieses Elementes bestimmt die Grösse des körperlichen Winkels, welchen die Elementarpyramide an ihrer Spitze bildet, und wir wollen es daher kurz das Element des körperlichen Winkels nennen. Die dabei geltende Einheit ergiebt sich daraus, dass der ganze körperliche Winkelraum um den Punct gleich 4π zu setzen ist. Betrachten wir nun in einer Elementarpyramide ein unendlich kurzes Stück, welches zwischen zwei um p geschlagenen Kugelflächen mit den Radien r und $r + dr$ liegt, so können wir dieses Stück als das Raumelement $d\tau$ annehmen. Da dasselbe als kleines Prisma mit der Grundfläche $r^2 d\sigma$ und der Höhe dr anzusehen ist, so kommt:

$$(21) \qquad d\tau = r^2 dr\, d\sigma \ .$$

Demnach ist:

$$(22) \qquad dq' = k r^2 dr\, d\sigma \ ,$$

und dadurch geht der obige Ausdruck von V über in:

$$(23) \qquad V = \varepsilon \iint kr\, dr\, d\sigma \ .$$

Hierin ist die zu integrirende Function kr für die ersten Elemente dr nicht nur nicht unendlich gross, sondern im Gegentheil unendlich klein, und die oben erwähnte Schwierigkeit fällt somit fort, indem man ohne Weiteres sieht, dass das Integral einen bestimmten endlichen Werth haben muss.

§. 11.

Wir wollen nun in derselben Weise die Componenten der Kraft, welche der Körper auf den Punct p ausübt, behandeln, und zwar wollen wir zunächst die nach der x–Richtung gehende Componente wählen.

Die von einem Elemente dq', dessen Coordinaten x', y', z' sind, und dessen Abstand von p durch r dargestellt wird, auf p ausgeübte Kraft ist $\varepsilon \frac{dq'}{r^2}$, und die in die x–Richtung fallende Componente dieser Kraft ist $\varepsilon \frac{dq'}{r^2} \cdot \frac{x'-x}{r}$, und man erhält daher für die x–Componente der ganzen Kraft den Ausdruck:

(24) $$X = \varepsilon \int \frac{x'-x}{r^3} dq' \ .$$

Hierin wird für unendlich kleine Werthe von r die zu integrirende Function sogar ein unendlich Grosses von der zweiten Ordnung; dessenungeachtet genügt auch hier die Einführung der obigen Polarcoordinaten, um diesem Uebelstande auszuweichen. Setzen wir nämlich für dq' wieder den in (22) gegebenen Ausdruck, so kommt:

(25) $$X = \varepsilon \iint k \frac{x'-x}{r} dr\, d\sigma \ .$$

Da die Länge $x'-x$ stets kleiner oder höchstens ebensogross als r ist, so bleibt die hier zu integrirende Function $k \frac{x'-x}{r}$ für alle Elemente dr eine endliche Grösse, und die Integration muss also einen bestimmten endlichen Werth geben.

Im vorigen Ausdrucke bedeutet der Bruch $\frac{x'-x}{r}$ den Cosinus des Winkels, welchen der nach dem Puncte x', y', z' hinführende Leitstrahl mit der x–Axe bildet. Nennt man diesen Winkel ϑ, so kann man schreiben:

(26) $$X = \varepsilon \iint k \cos\vartheta \, dr\, d\sigma \ .$$

In dieser Form ist der Ausdruck auch auf die Kraftcomponenten nach beliebigen anderen Richtungen anwendbar, wenn man festsetzt, dass ϑ den Winkel des veränderlichen Leitstrahles mit derjenigen Richtung, für welche man die Kraftcomponente bestimmen will, bedeuten soll.

§. 12.

Es fragt sich nun, ob die ebengefundene Formel für die Kraftcomponente X mit dem Differentialcoefficienten der Potentialfunction $\frac{dV}{dx}$ übereinstimmt.

Bei dieser Untersuchung entsteht eine neue Schwierigkeit. Wir haben in §. 10 die Potentialfunction in eine Form gebracht, welche zeigt, dass sie stets einen bestimmten endlichen Werth hat. Diese Form ist aber nicht brauchbar, wenn es sich darum handelt, die Potentialfunction nach den Coordinaten des Punctes p zu differentiiren, denn in diesem Falle darf man dem Puncte p nicht von vorne herein eine feste Lage zuschreiben, und darf ihn daher auch nicht zum Mittelpuncte von Polarcoordinaten machen. Man kann zwar denjenigen Punct, für welchen man den Differentialcoefficienten kennen will, zum Mittelpuncte der Polarcoordinaten wählen, muss dann aber die Potentialfunction so bestimmen, dass sie sich nicht auf diesen Mittelpunct bezieht, *sondern* auf irgend einen Punct in der Nähe desselben, dessen Coordinaten man noch als veränderlich betrachten kann. Wenn man einen solchen Ausdruck für die Potentialfunction gewonnen hat, so differentiire man ihn, und erst nachdem dieses geschehen ist, darf man in dem dadurch erhaltenen Ausdrucke des Differentialcoefficienten den Coordinaten bestimmte Werthe beilegen, welche man dann für unseren Fall so zu wählen hat, dass sie dem Mittelpuncte der Polarcoordinaten entsprechen.

Es kommt also darauf an, es so einzurichten, dass in dem Ausdrucke der Potentialfunction die zu integrirende Function für alle Elemente endlich bleibt, auch wenn der Punct p

nicht im Mittelpuncte der Polarcoordinaten liegt, und dass in dem Ausdrucke des Differentialcoefficienten der Potentialfunction die zu integrirende Function wenigstens dann für alle Elemente endlich bleibt, wenn der Punct p im Mittelpuncte der Polarcoordinaten liegt.

Dieses lässt sich ausführen, wenn man noch eine erlaubte Vereinfachung in die Bedingungen einführt. Wenn man nämlich den Differentialcoefficienten nach der Coordinate x bilden will, so braucht dazu der Punct p nicht nach allen Richtungen beweglich zu sein, sondern nur nach der x-Richtung. Ebenso für die Differentiation nach den Coordinaten y und z braucht der Punct nur resp. in der y- oder z-Richtung beweglich zu sein, oder allgemein, man braucht den Punct nur in der geraden Linie als beweglich zu betrachten, nach welcher man differentiiren will. Demgemäss denken wir uns durch den im Voraus gegebenen Punct, für welchen wir den Differentialcoefficienten $\frac{dV}{dx}$ kennen wollen, eine gerade Linie parallel der x-Richtung gezogen, und für einen beliebigen Punct dieser Geraden wollen wir die Potentialfunction bestimmen.

Die rechtwinkligen Coordinaten jenes im Voraus gegebenen Punctes seien x_1, y, z und die Coordinaten des beweglichen Punctes p seien, wie immer, x, y, z. Wir nehmen nun jenen ersteren Punct zum Mittelpuncte von folgendem Systeme von Polarcoordinaten. Die genannte, mit der x-Axe parallele Gerade bilde die Axe dieses Systemes. Die Länge des vom Mittelpuncte nach dem Elemente dq' gezogenen Leitstrahles heisse l, der Winkel, welchen der Leitstrahl mit der Axe bildet, ϑ, und der Winkel, welchen die durch die Axe und den Leitstrahl gelegte Ebene mit irgend einer anderen durch die Axe gehenden festen Ebene bildet, φ. Dann ist der Ausdruck des Raumelementes:

$$d\tau = l^2 \sin\vartheta \, dl \, d\vartheta \, d\varphi \ .$$

Um den Abstand r dieses Elementes von dem beweglichen

Puncte p zu bestimmen, wissen wir, dass p in der Axe liegt, um die Strecke $x-x_1$ vom Mittelpuncte entfernt, und zwar nach der positiven oder negativen Seite, jenachdem diese Differenz positiv oder negativ ist. Daraus folgt:

$$r = \sqrt{l^2 - 2l(x-x_1)\cos\vartheta + (x-x_1)^2}$$
$$= \sqrt{l^2\sin^2\vartheta + (l\cos\vartheta + x_1 - x)^2}\ .$$

Demnach ist die Potentialfunction:

$$(27)\qquad V = \varepsilon\iiint\frac{kl^2\sin\vartheta}{\sqrt{l^2\sin^2\vartheta + (l\cos\vartheta + x_1 - x)^2}}\,dl\,d\vartheta\,d\varphi\ .$$

Hierin ist die zu integrirende Function offenbar für alle Werthe der Veränderlichen endlich, da der Zähler den Factor $l\sin\vartheta$ enthält, welcher niemals grösser als der Nenner werden kann.

Differentiiren wir diesen Ausdruck nach x, so kommt zunächst:

$$\frac{dV}{dx} = \varepsilon\iiint\frac{kl^2\sin\vartheta\,(l\cos\vartheta + x_1 - x)}{[l^2\sin^2\vartheta + (l\cos\vartheta + x_1 - x)^2]^{\frac{3}{2}}}\,dl\,d\vartheta\,d\varphi\ ,$$

und wenn wir hierin dem Obigen gemäss für x den bestimmten Werth x_1 setzen, welcher dem Mittelpuncte der Polarcoordinaten entspricht, so erhalten wir:

$$(28)\qquad \frac{dV}{dx} = \varepsilon\iiint k\sin\vartheta\cos\vartheta\,dl\,d\vartheta\,d\varphi\ .$$

Man sieht dass in dieser Formel wiederum die zu integrirende Function für alle bei der Integration vorkommenden Elemente *endlich* bleibt. Demnach sind die oben gestellten Bedingungen erfüllt, und die letzte Formel kann als der richtige Ausdruck des Differentialcoefficienten $\frac{dV}{dx}$ an dem gegebenen Puncte betrachtet werden.

Vergleicht man diesen Ausdruck von $\frac{dV}{dx}$ mit dem in Gleichung (26) für X gefundenen, so ist klar, dass das Product $\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$ das Flächenelement darstellt, welches die durch die beiden Winkelelemente $d\vartheta$ und $d\varphi$ bestimmte Elementarpyramide aus der um den Mittelpunct der Coordinaten beschriebenen Kugelfläche mit dem Radius 1 ausschneidet, und wir können daher dieses Product durch $d\sigma$ ersetzen; ferner können wir für unseren jetzigen Fall, wo p im Mittelpuncte der Coordinaten liegt, dr statt dl schreiben. Dadurch wird der Ausdruck in (28) mit dem in (26) identisch.

Es versteht sich auch hier wieder von selbst, dass ganz ebenso, wie der Differentialcoefficient nach x, auch die Differentialcoefficienten nach y und z oder nach irgend einer beliebigen Richtung s sich behandeln lassen, und wir können daher als gewonnenes Resultat aussprechen: sowohl ausserhalb als auch innerhalb des Raumes, welcher von dem wirksamen Agens erfüllt ist, werden durch die ersten Differentialcoefficienten der Potentialfunction die Kraftcomponenten dargestellt.

§. 13.

Wenden wir uns nun zur Betrachtung der zweiten Differentialcoefficienten, so finden wir wieder eine wichtige Eigenschaft der Potentialfunction.

Da nach Gleichung (10) ist:

$$r = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}\ ,$$

so erhält man, wenn man den Bruch $\frac{1}{r}$ zweimal nach derselben Veränderlichen differentiirt:

$$(29)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dx^2} = -\dfrac{1}{r^3} + 3\dfrac{(x'-x)^2}{r^5} \\[2ex] \dfrac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dy^2} = -\dfrac{1}{r^3} + 3\dfrac{(y'-y)^2}{r^5} \\[2ex] \dfrac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dz^2} = -\dfrac{1}{r^3} + 3\dfrac{(z'-z)^2}{r^5} \end{cases}$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen kommt:

$$(30)\qquad \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dx^2} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dy^2} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dz^2} = 0\ .$$

Um dieses Resultat auf die Potentialfunction anzuwenden, betrachten wir die allgemeine in (I) gegebene Form derselben:

$$V = \varepsilon \int \frac{1}{r}\, dq' \ .$$

Für den Fall, dass r für alle vorkommenden Elemente dq' eine endliche Grösse bleibt, können wir die doppelte Differentiation sofort unter dem Integralzeichen vornehmen, indem wir schreiben:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \varepsilon \int \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{dx^2}\, dq'$$

und entsprechend für die beiden anderen Coordinaten, und indem wir diese Differentiation wirklich ausführen, erhalten wir unter dem Integralzeichen nach einander die drei Ausdrücke (29), welche unter der gemachten Voraussetzung, dass r nicht unendlich klein wird, nicht unendlich gross werden können, und daher die für die bestimmte Ausführbarkeit der Integration nothwendige Bedingung erfüllen. Wenn wir diese drei Integrale addiren, so heben sie sich natürlich ebenso auf, wie die Ausdrücke (29), und wir bekommen:

(31) $$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0 \ .$$

Diese Summe der drei zweiten Differentialcoefficienten kommt in der Potentialtheorie so häufig vor, dass es zweckmässig ist, sie durch ein kurzes Zeichen darzustellen, und wir wollen dieses, ähnlich wie Green, durch ein vor die Function geschriebenes D thun[1]), so dass die vorige Gleichung in dieser Abkürzung lautet:

(31a) $$DV = 0 \ .$$

Da bei der Bildung dieser Gleichung vorausgesetzt wurde, dass r für alle Elemente dq' endlich bleibe, so folgt daraus dass, wenn das wirksame Agens einen körperlichen Raum stetig aus-

1) Green hat das Zeichen δV gebraucht, da aber der Buchstabe δ auch zur Bezeichnung der Variationen angewandt wird, so habe ich die kleine Aenderung gemacht, D statt δ zu schreiben.

füllt, die Gleichung nur für den Fall bewiesen ist, dass der Punct p ausserhalb dieses Körpers liegt, und vorläufig müssen wir sogar annehmen, dass p in endlichem Abstande von der Oberfläche des Körpers entfernt liege.

§. 14.

Befindet sich p innerhalb des Körpers, so ist für die nächsten Elemente dq' der Abstand r unendlich klein und die in (29) gegebenen zu integrirenden Ausdrücke werden daher unendlich gross. Man könnte nun vielleicht meinen, dass dieser Umstand auch hier, wie in den früheren Fällen, weil er sich nur auf eine unendlich kleine Menge des Agens bezieht, kein wesentliches Hinderniss für die Anwendbarkeit der Formeln bilde; bei näherer Betrachtung findet man jedoch, dass die Sache sich in diesem Falle anders verhält, weil die zu integrirenden Functionen unendliche Grössen von zu hoher Ordnung werden.

Bilden wir nämlich den Differentialcoefficienten $\frac{d^2V}{dx^2}$ in der vorher angegebenen Weise, und setzen darin für das Element dq' den in Gleichung (22) gegebenen Ausdruck $kr^2\,dr\,d\sigma$, so kommt:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \varepsilon \iint \frac{k}{r}\left(-1+3\frac{(x'-x)^2}{r^2}\right) dr\,d\sigma ,$$

und wenn wir hierin noch für $\frac{x'-x}{r}$, wie in §. 11, schreiben $\cos\vartheta$, und dem entsprechend das Element $d\sigma$ durch $\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$ ersetzen, so lautet die Formel:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \varepsilon \iiint \frac{k}{r}(-1+3\cos^2\vartheta)\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi .$$

Man sieht, dass selbst in dieser durch Einführung von Polarcoordinaten umgestalteten Formel wegen des r, welches im Nenner geblieben ist, die zu integrirende Function für die ersten Elemente dr unendlich gross wird. Auf den ersten Blick könnte es sogar scheinen, als ob auch das ganze Integral unendlich gross werden müsste, weil das Integral $\int\frac{dr}{r}$, wenn es von $r=0$ bis zu einem endlichen Werthe von r genommen wird, unendlich gross wird. Wenn man jedoch auch die Integrationen nach den beiden anderen Veränderlichen ϑ und φ berücksichtigt, so findet man, dass allerdings, wenn diese Integrationen nur auf einen Theil des körperlichen Winkelraumes um p ausgedehnt werden, unendliche Werthe entstehen, dass aber bei Ausdehnung auf den ganzen Winkelraum das Integral sich in die Gestalt einer algebraischen Summe bringen lässt, welche unendlich grosse Glieder enthält, die aber verschiedene Vorzeichen haben, und sich der Form nach gegenseitig aufheben. Diese Summe ist nicht als unendlich gross zu betrachten, aber auf der andern Seite kann man ihr auch keinen bestimmten endlichen Werth zuschreiben, weil die algebraische Summe zweier mit entgegengesetzten Vorzeichen versehener unendlicher Grössen, welche der Form nach gleich sind, nicht ohne Weiteres gleich Null zu setzen ist, sondern einen unbestimmten Werth hat.

Ohne auf diesen Gegenstand specieller einzugehen, können wir jedenfalls soviel sagen, dass die obige Formel, welche dadurch entstanden ist, dass der Ausdruck von V zweimal unter dem Integralzeichen differentiirt wurde, zur Bestimmung des wahren Werthes von $\frac{d^2V}{dx^2}$ nicht geeignet ist, weil selbst nach Einführung von Polarcoordinaten die zu integrirende Function nicht für alle vorkommenden Werthe der Veränderlichen endlich ist. Wir müssen also die Werthe der zweiten Differentialcoefficienten von V und ihrer Summe DV auf andere Weise zu bestimmen suchen.

Es wird zweckmässig sein, hier gleich im Voraus anzugeben, welches Resultat man bei der richtigen Bestimmungsweise jener Grössen erhält. Sei nämlich k_p die Dichtigkeit des Agens in dem betrachteten Puncte p, auf welchen sich die Potentialfunction bezieht, so ist:

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi\varepsilon k_p \\ DV = -4\pi\varepsilon k_p \,. \end{cases}$$

Diese Gleichung, welche die früher unter (31) mitgetheilte Gleichung als speciellen Fall umfasst, indem ausserhalb des Körpers $k=0$ ist, drückt die zweite Haupteigenschaft der Potentialfunction aus, nämlich die, dass man aus der Potentialfunction eines Agens auch seine Dichtigkeit k als Function der Raumcoordinaten ableiten, und somit die Art, wie das Agens durch den Raum vertheilt ist, bestimmen kann.

Der Beweis dieser wichtigen Gleichung bietet, wenn er ganz streng geführt werden soll, einige Schwierigkeiten dar, welche man auf verschiedene Weisen zu überwinden gesucht hat. Ich will hier einen Beweis mittheilen, welchen ich vor einiger Zeit in LIOUVILLE's Journal[1]) veröffentlicht habe.

§. 15.

Des leichteren Verständnisses wegen wollen wir zunächst den speciellen Fall behandeln, wo die Dichtigkeit des Agens in dem ganzen Körper gleich ist, oder der Körper in Bezug auf das Agens homogen ist.

In diesem Falle ist die Grösse k constant, und kann daher in dem in (23) gegebenen Ausdrucke von V aus dem Integralzeichen herausgenommen werden, so dass die Gleichung lautet:

$$V = \varepsilon k \iint r\, dr\, d\sigma \quad . \tag{32}$$

Hierin lässt sich die Integration nach r sogleich ausführen. Das allgemeine Integral ist $\frac{r^2}{2}$, aber die Grenzen, zwischen denen es genommen werden muss, sind verschieden je nach der Gestalt des Körpers und der Lage des Punctes p.

Befindet sich p im Innern des Körpers, und ist dieser so gestaltet, dass jeder von p ausgehende Leitstrahl die Oberfläche nur einmal trifft, so ist, wenn wir den Abstand des Durch-

1) Sér. II. T. III, 1858.

schnittspunctes vom Puncte p mit R bezeichnen, das Integral von 0 bis R zu nehmen, und es kommt:

$$(33)\qquad V = \frac{\varepsilon k}{2}\int R^2 d\sigma\ .$$

Das hierin noch vorkommende Integral erstreckt sich über den ganzen körperlichen Winkelraum um p.

Befindet sich p wieder im Innern des Körpers, ist die Gestalt des letzteren aber der Art, dass die Leitstrahlen nach manchen Richtungen hin die Oberfläche mehr als einmal schneiden, so muss, wenn der Körper endlich und somit seine Oberfläche ganz geschlossen ist, die Anzahl der Durchschnittspuncte jedenfalls eine ungerade sein. Betrachten wir eine nach einer solchen Richtung gehende Elementarpyramide, so liegt diese von der Spitze bis zum ersten Durchschnitte innerhalb des Körpers, vom ersten bis zum zweiten Durchschnitte ausserhalb, vom zweiten bis zum dritten innerhalb u. s. f. Da für die Potentialfunction nur die Theile in Betracht kommen, welche innerhalb des Körpers liegen, so haben wir, wenn R_1, R_2, R_3 etc. die vom Puncte p aus gerechneten Abstände der aufeinander folgenden Durchschnitte sind, die Integration nach r von 0 bis R_1, von R_2 bis R_3 u. s. f. auszuführen, und bekommen dadurch:

$$(33a)\qquad V = \frac{\varepsilon k}{2}\int (R_1^2 - R_2^2 + R_3^2 - \text{etc.})\, d\sigma\ .$$

Befindet sich p ausserhalb des Körpers, so muss für jeden Leitstrahl, welcher den Körper überhaupt trifft, die Anzahl der Durchschnitte mit der Oberfläche eine gerade sein, und das Integral nach r ist in diesem Falle, wie man leicht sieht, von R_1 bis R_2, dann (falls noch weitere Durchschnitte vorkommen,) von R_3 bis R_4 u. s. f. zu nehmen. Es kommt also:

$$(33b)\qquad V = \frac{\varepsilon k}{2}\int (-R_1^2 + R_2^2 - \text{etc.})\, d\sigma\ .$$

Das Integral nach σ bezieht sich in diesem Falle natürlich nur auf den Theil des körperlichen Winkelraumes um p, in welchem der gegebene Körper liegt. Denkt man sich also von p aus um den Körper einen Berührungskegel gelegt, so erstreckt sich das

Integral nach σ über die Oeffnung dieses Kegels. Sollte der Körper die Gestalt einer ganz geschlossenen Schaale haben, und p in dem eingeschlossenen hohlen Raume liegen, so ist das Integral wieder über den ganzen körperlichen Winkelraum 4π auszudehnen.

Befindet sich p endlich gerade in der Oberfläche des Körpers, so ist es gleichgültig, welche der beiden letzten Gleichungen man anwendet, indem man aus beiden das richtige Resultat erhalten kann, wenn man die Richtungen, nach welchen $R_1 = 0$ gesetzt werden muss, in entsprechender Weise wählt.

In diesen Gleichungen können wir das auf den körperlichen Winkel bezügliche Integral in ein anderes verwandeln. Betrachten wir bei einer Elementarpyramide mit dem körperlichen Winkel $d\sigma$ das Flächenelement, welches sie aus der Oberfläche des Körpers ausschneidet, und welches $d\omega$ heissen möge, so stehen diese beiden Elemente in einer einfachen Beziehung zu einander. Wenn wir den Cosinus des Winkels, welchen der nach $d\omega$ gezogene Leitstrahl mit der auf $d\omega$ errichteten Normale bildet, mit i bezeichnen, so ist offenbar:

(34) $$i d\omega = \pm R^2 d\sigma \;,$$

worin die Wahl des Vorzeichens davon abhängt, ob i eine positive oder negative Grösse ist. Um das letztere entscheiden zu können, möge ein- für allemal festgesetzt werden, dass wir bei Winkelbestimmungen die Richtung des Leitstrahles immer nach der Seite hin betrachten, nach welcher seine Länge wächst, und die Richtung der Normale nach der Seite, welche vom Körper nach Aussen geht. Dann ist klar, dass überall, wo der Leitstrahl, indem er wächst, aus dem Körper heraustritt, der Winkel zwischen Leitstrahl und Normale kleiner als 90°, und somit der mit i bezeichnete Cosinus positiv ist; überall dagegen, wo der Leitstrahl in den Körper hineintritt, der Winkel grösser als 90° und somit i negativ ist.

Sehen wir nun, wie sich hierdurch die obigen Integrale gestalten. Wenn eine Elementarpyramide die Oberfläche mehrmals schneidet, so gehören zu demselben Elemente $d\sigma$ des körperlichen Winkels mehrere Elemente der Körperoberfläche $d\omega_1$, $d\omega_2$ etc., jedes mit seinem bosonderen Werthe von i, so dass der Reihe von Producten $R_1^2 d\sigma$, $R_2^2 d\sigma$ etc., welche in den Integralen vorkommen, ebensoviele Producte $i_1 d\omega_1$, $i_2 d\omega_2$ etc. entsprechen. Untersucht man die vor den einzelnen R^2 stehenden Vorzeichen, so findet man dass in den Fällen, wo i positiv ist, auch das entsprechende R^2 das Pluszeichen hat, und in den Fällen wo i negativ ist, R^2 das Minuszeichen hat. Demnach braucht man zu den Producten $i d\omega$ äusserlich kein Vorzeichen hinzuzufügen, indem sie durch den Factor i von selbst in der richtigen Weise positiv und negativ werden. Da nun alle durch das vorige Verfahren erhaltenen Flächenelemente $d\omega$ zusammen gerade die ganze Oberfläche des Körpers ausmachen, so entsteht die einfache Gleichung:

$$\text{(III)} \qquad V = \frac{\varepsilon k}{2} \int i d\omega \;,$$

welche für jede Gestalt des Körpers und jede Lage des Punctes p gültig bleibt.

Diese Form der Potentialfunction eines homogenen Körpers, in welcher die Integration über den Rauminhalt auf eine Integration über die Oberfläche zurückgeführt ist, ist für viele Untersuchungen sehr bequem, und kann unter andern auch für unsern vorliegenden Zweck dienen.

§. 16.

Da die in (III) vorgeschriebene Integration nach einer Grösse stattfindet, welche von den Coordinaten x, y, z des Punctes p unabhängig ist, so kann man nach diesen Coordinaten unter dem Integralzeichen differentiiren, und erhält dadurch:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\varepsilon k}{2} \int \frac{di}{dx} d\omega$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{\varepsilon k}{2} \int \frac{d^2i}{dx^2} d\omega \;;$$

und ebenso in Bezug auf die beiden anderen Coordinaten. Durch Addition der drei zweiten Differentialcoefficienten kommt:

(35) $$DV = \frac{\varepsilon k}{2} \int \left(\frac{d^2 i}{dx^2} + \frac{d^2 i}{dy^2} + \frac{d^2 i}{dz^2} \right) d\omega \ .$$

Zur näheren Bestimmung von i seien die Cosinus der Winkel des nach $d\omega$ gezogenen Leitstrahles mit den drei Coordinatenaxen mit a, b, c, und die Cosinus der Winkel der auf $d\omega$ errichteten Normale mit den Coordinatenaxen mit α, β, γ bezeichnet; dann ist:

$$i = a\alpha + b\beta + c\gamma \ .$$

Ferner ist, wenn ξ, η, ζ die Coordinaten des Elementes $d\omega$ sind:

$$a = \frac{\xi - x}{R} \ ; \quad b = \frac{\eta - y}{R} \ ; \quad c = \frac{\zeta - z}{R} \ .$$

Dadurch geht die vorige Gleichung über in:

(36) $$i = \frac{(\xi - x)\alpha + (\eta - y)\beta + (\zeta - z)\gamma}{R}$$

und zugleich ist:

(37) $$R = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2} \ .$$

Hiernach können wir die Differentialcoefficienten von i bilden, und bekommen:

(38) $$\left\{ \begin{aligned} \frac{di}{dx} &= \frac{\xi - x}{R^2}\, i - \frac{\alpha}{R} \\ \frac{di}{dy} &= \frac{\eta - y}{R^2}\, i - \frac{\beta}{R} \\ \frac{di}{dz} &= \frac{\zeta - z}{R^2}\, i - \frac{\gamma}{R} \end{aligned} \right.$$

(39) $$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 i}{dx^2} &= \frac{3(\xi - x)^2 - R^2}{R^4}\, i - 2\frac{\xi - x}{R^3}\alpha \\ \frac{d^2 i}{dy^2} &= \frac{3(\eta - y)^2 - R^2}{R^4}\, i - 2\frac{\eta - y}{R^3}\beta \\ \frac{d^2 i}{dz^2} &= \frac{3(\zeta - z)^2 - R^2}{R^4}\, i - 2\frac{\zeta - z}{R^3}\gamma \ . \end{aligned} \right.$$

Nehmen wir nun vorläufig an, dass der Punct p sich in endlicher Entfernung von der Oberfläche befinde, so dass R für kein Flächenelement unendlich klein wird, so können die einzelnen Glieder der vorstehenden Ausdrücke nicht unendlich gross werden, und die Ausdrücke sind daher zur Integration anwendbar.

Wenn man nun die drei letzten Ausdrücke addirt, so heben sich ihre ersten Glieder auf und es bleibt

$$\frac{d^2 i}{dx^2}+\frac{d^2 i}{dy^2}+\frac{d^2 i}{dz^2}=-2\,\frac{(\xi-x)\alpha+(\eta-y)\beta+(\zeta-z)\gamma}{R^3}$$

$$(40)\qquad =-2\,\frac{i}{R^2}\ ,$$

und dadurch geht die Gleichung (35) über in:

$$(41)\qquad DV=-\varepsilon k\int\frac{i}{R^2}\,d\omega\ .$$

Die hierin vorkommende Integration lässt sich leicht ausführen.

Nach Gleichung (34) ist nämlich:

$$\frac{i}{R^2}\,d\omega=\pm\,d\sigma\ ,$$

worin $d\sigma$ dasjenige körperliche Winkelelement ist, welches zu derselben Elementarpyramide gehört, wie $d\omega$. Da nun, wie im vorigen § besprochen wurde, zu Einer Elementarpyramide mehrere Elemente $d\omega$ gehören können, so kann dasselbe Element $d\sigma$ mehrmals mit verschiedenen Vorzeichen in dem Integrale vorkommen, und in dieser Beziehung tritt ein wesentlicher Unterschied ein, jenachdem p ausserhalb oder innerhalb des Körpers liegt.

Liegt p ausserhalb des Körpers, so schneidet jede Elementarpyramide, welche überhaupt den Körper trifft, seine Oberfläche eine gerade Anzahl von Malen, und eben so oft kommt das dazugehörige $d\sigma$ in dem Integrale vor, und zwar abwechselnd mit dem negativen und positiven Vorzeichen. Die zu jeder Elementarpyramide gehörigen Elemente heben sich also gegenseitig auf, und wir erhalten somit dasselbe Resultat, welches für diesen Fall schon oben auf andere Weise abgeleitet wurde, nämlich:

$$DV=0\ .$$

Liegt p dagegen innerhalb des Körpers, so kommt jedes Element des körperlichen Winkels eine ungerade Anzahl von Malen vor, das erste Mal positiv, und dann abwechselnd negativ und positiv. Es bleibt also jedes Element nur Einmal und zwar mit dem positiven Vorzeichen übrig. Die Gleichung (41) lässt sich daher für diesen Fall schreiben:

$$(42) \qquad DV = -\varepsilon k \int d\sigma$$

worin das Integral über den ganzen körperlichen Winkelraum auszudehnen ist, welcher bekanntlich durch 4π dargestellt wird. Demnach erhält man:

$$DV = -4\pi\varepsilon k \ ,$$

welches die zu beweisende Gleichung ist, da die in (II) mit k_p bezeichnete Dichtigkeit beim Puncte p in einem homogenen Körper gleich der allgemeinen Dichtigkeit k ist.

§. 17.

Im vorigen § ist angenommen, dass der Punct p, für welchen die zweiten Differentialcoefficienten bestimmt wurden, sich in endlicher Entfernung von der Oberfläche befinde. Wir müssen nun untersuchen, ob und in wieweit das gefundene Resultat gültig bleibt, wenn sich der Punct, sei's innerhalb oder ausserhalb des Körpers, der Oberfläche unendlich nähert.

Wenn p sich in unmittelbarer Nähe der Oberfläche befindet, so ist für die nächstumgebenden Flächenelemente $d\omega$ der Abstand R unendlich klein, und dadurch werden die Differentialcoefficienten von i unendlich gross, und es fragt sich, ob es dessenungeachtet statthaft ist, die obigen Formeln von $\frac{d^2V}{dx^2}$, $\frac{d^2V}{dy^2}$ un d $\frac{d^2V}{dz^2}$, welche dadurch erhalten wurden, dass der in (III) gegebene Integralausdruck von V unter dem Integralzeichen differentiirt wurde, anzuwenden, und die Entscheidung dieser Frage hängt wiederum davon ab, ob jene Formeln sich in solche Gestalt bringen lassen, dass die zu integrirende Function für alle bei der Integration vorkommenden Elemente endlich bleibt, so dass also die Integration bestimmt ausführbar ist.

Zur Erleichterung der Untersuchung wollen wir das Coordinatensystem so wählen, wie es für diesen Fall am bequemsten ist. Indem wir uns den Punct p in einer bestimmten Lage dicht an der Oberfläche denken, fällen wir von demselben auf die Oberfläche eine Normale, und nehmen diese als z-Axe, und die im Fusspuncte der Normale an die Oberfläche gelegte Tangentialebene als xy-Ebene. Dann sind die Coordinaten x und y des Punctes p Null, und die aus (39) hervorgehenden Formeln lassen sich folgendermaassen schreiben:

$$(43)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2V}{dx^2}=\varepsilon k\displaystyle\int\left(\frac{3\xi^2-R^2}{2R^4}\,i-\frac{\xi\alpha}{R^3}\right)d\omega \\ \dfrac{d^2V}{dy^2}=\varepsilon k\displaystyle\int\left(\frac{3\eta^2-R^2}{2R^4}\,i-\frac{\eta\beta}{R^3}\right)d\omega \\ \dfrac{d^2V}{dz^2}=\varepsilon k\displaystyle\int\left(\frac{3(\zeta-z)^2-R^2}{2R^4}\,i-\frac{(\zeta-z)\gamma}{R^3}\right)d\omega\ . \end{cases}$$

Die beiden Glieder, aus welchen jeder dieser Integralausdrücke besteht, erfordern eine verschiedene Behandlung.

Die ersten Glieder, welche mit dem Factor i behaftet sind, lassen sich kurz abmachen. Nach Gleichung (34) können wir setzen:

$$\frac{i}{R^2}\,d\omega=\pm\,d\sigma\ .$$

Dadurch geht der erste Theil des ersten Integrales über in:

$$\int\pm\frac{3\xi^2-R^2}{2R^2}\,d\sigma\ ,$$

worin die zu integrirende Function offenbar für alle Elemente $d\sigma$ endlich bleiben muss, weil R^2 nicht kleiner als ξ^2 werden kann. Ganz entsprechende Ausdrücke erhält man als die ersten Theile der beiden anderen Integrale, und wenn man diese drei Ausdrücke addirt, so heben sie sich, wie wir früher schon gesehen haben, gegenseitig gerade auf. Es lässt sich sogar beweisen, dass jeder dieser Ausdrücke einzeln für jede geschlossene Fläche Null werden muss, indessen kommt es darauf bei unserer jetzigen Untersuchung nicht an, da wir nur die Summe der drei Differentialcoefficienten und nicht ihre einzelnen Werthe zu kennen brauchen.

Es bleiben also nur die zweiten Glieder der Integrale zu untersuchen, und diese Untersuchung können wir auch noch dadurch beschränken, dass wir nur ein kleines Stück der Oberfläche, welches den Fusspunct der Normale umgiebt, betrachten. Nur für diesen zunächstliegenden Theil der Oberfläche brauchen wir nachzuweisen, dass die Integrale sich so umgestalten lassen, dass die zu integrirende Function endlich bleibt, denn für alle entfernteren Theile, für welche R eine endliche Grösse ist, ist gar keine Umgestaltung nöthig, da die geforderte Bedingung schon in der gegenwärtigen Form erfüllt ist. Wir wollen zur Abkürzung für die jetzt zu betrachtenden Integrale besondere Zeichen einführen, indem wir setzen:

$$(44)\qquad \begin{cases} A=\int\frac{\xi\alpha}{R^3}\,d\omega \\ B=\int\frac{\eta\beta}{R^3}\,d\omega \\ C=\int\frac{(\zeta-z)\gamma}{R^3}\,d\omega, \end{cases}$$

worin dem Vorigen gemäss die Integrationen sich nicht über die ganze Oberfläche des Körpers, sondern nur über ein kleines Stück derselben um den Fusspunct der Normale erstrecken.

Wenn die Gleichung der Oberfläche in der Form:

$$(45)\qquad \zeta=f(\xi,\eta)$$

gegeben ist, so sind die Cosinus der Winkel, welche die Normale mit den Coordinatenaxen bilden, durch folgende Formeln bestimmt:

$$\alpha=-\frac{\frac{d\zeta}{d\xi}}{\sqrt{1+\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right)^2}}$$

$$\beta=-\frac{\frac{d\zeta}{d\eta}}{\sqrt{1+\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right)^2}}$$

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right)^2}}.$$

Mit Hülfe der letzten dieser drei Gleichungen gehen die beiden ersten über in:

$$(46)\qquad \begin{cases} \alpha = -\dfrac{d\zeta}{d\xi}\,\gamma \\ \beta = -\dfrac{d\zeta}{d\eta}\,\gamma\,. \end{cases}$$

Setzen wir den Werth von α in die erste der Gleichungen (44) ein, so kommt:

$$(47)\qquad A = -\int \frac{\xi\,\frac{d\zeta}{d\xi}}{R^3}\,\gamma d\omega\,.$$

Das Product $\gamma d\omega$ ist die Projection des Elementes $d\omega$ auf die xy-Ebene, oder, wenn wir uns das ganze betrachtete Flächenstück auf die xy-Ebene projicirt denken, so können wir $\gamma d\omega$ als ein Element dieser Projection ansehen, und dann die Integration auf die letztere beziehen. Wir führen dazu Polarcoordinaten in der xy-Ebene um den Anfangspunct der rechtwinkligen Coordinaten ein, indem wir den nach irgend einem Puncte der Ebene gezogenen Leitstrahl mit u, und den Winkel, welchen dieser mit der x-Axe bildet, mit φ bezeichnen. Dann wird ein Element der Ebene dargestellt durch:

$$u du\, d\varphi$$

und diesen Ausdruck können wir daher für $\gamma d\omega$ setzen. Wenn wir dabei zugleich berücksichtigen, dass

$$\xi = u \cos\varphi$$

ist, so geht (47) über in:

$$(48)\qquad A = -\iint \frac{\cos\varphi\,\frac{d\zeta}{d\xi}\,u^2}{R^3}\,du\,d\varphi\,.$$

Hierin müssen wir endlich noch den Differentialcoefficienten $\frac{d\zeta}{d\xi}$ näher betrachten. Im Anfangspuncte der Coordinaten sind, da die xy-Ebene in diesem Puncte Tangentialebene ist, die beiden Differentialcoefficienten $\frac{d\zeta}{d\xi}$ und $\frac{d\zeta}{d\eta}$ gleich Null, und für die Umgebung dieses Punctes können wir, wenn die hier stattfindende Krümmung der Oberfläche als endlich vorausgesetzt wird, setzen:

$$(49)\qquad \frac{d\zeta}{d\xi} = mu\ ;\quad \frac{d\zeta}{d\eta} = nu\ ,$$

worin m und n zwei Functionen von u und φ sind, welche für kleine Werthe von u nicht unendlich gross werden. Die Gleichung (48) lässt sich also schreiben:

$$(50)\qquad A = -\iint \frac{m\cos\varphi . u^2}{R^3}\, du\, d\varphi\ .$$

Da nun R nicht kleiner als u werden kann, indem

$$R = \sqrt{u^2 + (\zeta - z)^2}$$

ist, so sieht man, dass die zu integrirende Function endlich bleiben muss.

Ganz durch dieselbe Behandlungweise erhält man:

$$(51)\qquad B = -\iint \frac{n\sin\varphi . u^2}{R^3}\, du\, d\varphi\ .$$

Mit Hülfe dieser beiden Ausdrücke von A und B lässt sich auch der Ausdruck von C in die gewünschte Form bringen. Da nach Gleichung (36), wenn wir darin x und $y = 0$ setzen, ist:

$$i = \frac{\xi\alpha + \eta\beta + (\zeta - z)\gamma}{R}$$

so kommt:

$$\frac{(\zeta - z)\gamma}{R} = i - \frac{\xi\alpha}{R} - \frac{\eta\beta}{R}\ ,$$

und wenn man diesen Werth von $\frac{(\zeta - z)\gamma}{R}$ in den unter (44) mitgetheilten Ausdruck von C einsetzt, so kommt:

$$C = \int \frac{i}{R^2} d\omega - \int \frac{\xi\alpha}{R^3} d\omega - \int \frac{\eta\beta}{R^3} d\omega$$

$$(52)\qquad = \int \pm\, d\sigma - A - B\ .$$

Daraus folgt, dass, wenn die in A und B vorkommenden Integrationen ausführbar sind, damit zugleich auch C auf ausführbare Integrationen zurückgeführt ist.

Zugleich sieht man aus der Form der letzten Gleichung, dass

$$(53)\qquad A + B + C = \int \pm\, d\sigma$$

ist, und da für alle entfernteren Theile der Oberfläche, welche ausserhalb des von uns vorläufig betrachteten Flächenstückes liegen, dieselbe Gleichung aus dem Früheren als bekannt vorausgesetzt werden kann, so gelangen wir für DV wieder zur Gleichung (II), und diese Gleichung bleibt somit gültig, wie nahe auch der Punct p an der Oberfläche des Körpers liegen mag, und zwar sowohl an der inneren als auch an der äusseren Seite der Oberfläche.

Wenn der Punct die Oberfläche durchschreitet, und aus dem Inneren des Körpers in den leeren Raum tritt, so ändert von den Elementen $d\sigma$ die eine Hälfte ihr Vorzeichen, und dadurch ändert sich der Werth von DV eben so sprungweise, wie sich die Dichtigkeit k_p bei diesem Durchgange ändert. In der Oberfläche selbst verliert die Gleichung (II) ihre bestimmte Bedeutung, weil man hier für die Dichtigkeit k_p weder k noch 0 als den unbedingt richtigen Werth angeben kann. Man kann indessen nicht sagen, dass die Gleichung (II) hier ungültig wird, sondern sie drückt eben aus, dass der Werth von DV an dieser Stelle eben so unbestimmt ist, wie der von k_p.

§. 18.

Bei der vorigen Auseinandersetzung wurde vorausgesetzt, dass die Krümmung an der betreffenden Stelle endlich sei; aber auch diese Bedingung ist zur Gültigkeit der Gleichung (II) nicht nothwendig. Nehmen wir an, dass statt der Gleichungen (49) die folgenden Gleichungen gelten:

$$(54) \qquad \frac{d\zeta}{d\xi} = mu^{\mu} \; ; \quad \frac{d\zeta}{d\eta} = nu^{\nu} \; ,$$

so ist, wenn die Exponenten μ und $\nu < 1$ sind, die Krümmung an dem betreffenden Puncte, welcher zugleich der Anfangspunct der Coordinaten ist, unendlich gross. Dessenungeachtet bleibt die Gleichung (II) gültig, so lange nur die Exponenten angebbare positive Werthe haben.

Es handelt sich zum Beweise wieder nur um die Ausführbarkeit der Integrale A und B. Setzen wir in (48) für $\frac{d\zeta}{d\xi}$ die obengegebene Formel ein, so kommt statt der Gleichung (50), wenn wir zugleich für R seinen Werth setzen:

$$A = -\iint \frac{m \cos\varphi\, u^{2+\mu}}{[u^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{3}{2}}}\, du\, d\varphi \;.$$

Hierin wollen wir die neue Veränderliche u' einführen mit der Bedeutung:

$$u' = u^{\mu} \;,$$

woraus folgt:

$$u = u'^{\frac{1}{\mu}}$$

$$du = \frac{1}{\mu} u'^{\frac{1}{\mu} - 1}\, du' \;.$$

Dadurch geht der Ausdruck über in:

$$(55) \qquad A = -\frac{1}{\mu} \iint \frac{m \cos\varphi\, u'^{\frac{3}{\mu}}}{\left[u'^{\frac{2}{\mu}} + (\xi - z)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\, du'\, d\varphi \;.$$

Hierin kann der Nenner nicht kleiner als $u'^{\frac{3}{\mu}}$ werden, und die zu integrirende Function bleibt also endlich. Dasselbe gilt von dem Integrale B, und durch die Ausführbarkeit dieser beiden Integrale ist, wie vorher, auch die des Integrales C mit bewiesen.

Nur dann hört die Gleichung (II) auf gültig zu sein, wenn die Körperoberfläche an der betreffenden Stelle so gestaltet ist, dass auch die Gleichungen (54) mit angebbaren positiven Werthen von μ und ν nicht mehr angewandt werden können, wenn also, wie Gauss es bei einer anderen Gelegenheit ausdrückt[1]), die Differentialcoefficienten mit keiner Potenz von u mehr zu einerlei Ordnung gehören. Dieses ist insbesondere der Fall bei absolut scharfen Spitzen, Ecken und Kanten, bei denen es gar keine bestimmte Tangentialebene giebt. Indessen sind auch Fälle denkbar, wo noch eine bestimmte Tangentialebene vor-

1) Allgemeine Lehrsätze u. s. w. S. 25.

handen ist, und doch die Gleichungen (54) nicht gelten. Gauss führt als ein Beispiel der Art an, wenn die Differentialcoefficienten von der Ordnung $\frac{1}{\log\frac{1}{u}}$ wären. Solche Fälle können in Bezug auf ihr Verhalten zur Gleichung (II) denen zugesellt werden, wo die Fläche wirkliche Spitzen und Kanten bildet. Was diese letzteren Fälle anbetrifft, so kann man sich leicht davon überzeugen, dass in unmittelbarer Nähe einer Spitze oder Kante die zweiten Differentialcoefficienten der Potentialfunction einzeln unendlich gross werden; und wenn in ihrer Summe die unendlich grossen Glieder sich der Form nach auch gegenseitig aufheben, so kann man doch von einer algebraischen Summe, deren einzelne Glieder unendlich gross sind, nicht mehr einen bestimmten endlichen Werth angeben.

§. 19.

Bevor ich die homogenen Körper verlasse, und mich zum Beweise desselben Satzes für nicht homogene Körper wende, will ich über die ersten Differentialcoefficienten des in (III) gegebenen Ausdruckes von V eine Bemerkung einschalten, welche zwar mit jenem Beweise nichts zu thun hat, aber für andere Anwendungen desselben Ausdruckes nothwendig ist.

Wählen wir wieder beispielsweise den auf die x-Coordinate bezüglichen Differentialcoefficienten, so ist dieser gemäss der ersten der Gleichungen (38):

$$(56)\qquad \frac{dV}{dx}=\frac{\varepsilon k}{2}\int\!\!\int\left(\frac{\xi-x}{R^2}\,i-\frac{\alpha}{R}\right)d\omega\ .$$

Nun haben wir früher, in §. 11, die nach der x-Richtung gehende Kraftcomponente direct bestimmt, und haben gefunden [Gleichung (26)]:

$$X=\varepsilon\int\!\!\int k\cos\vartheta\,dr\,d\sigma\ ,$$

worin ϑ den Winkel des Leitstrahles mit der x-Richtung bedeutet. Für unseren Fall, wo k constant ist, können wir die Integration nach r ausführen, und erhalten:

$$(57) \qquad X = \varepsilon k \int (\pm R_1 \pm R_2 \pm \text{etc.}) \cos\vartheta \, d\sigma \ ,$$

worin sich die Werthe R_1, R_2 etc. auf die verschiedenen Durchschnitte desselben Leitstrahles mit der Oberfläche beziehen, und die Vorzeichen so zu nehmen sind, wie es in §. 15 auseinandergesetzt ist. Führen wir hierin statt $d\sigma$ das Oberflächenelement $d\omega$ ein, und setzen zugleich für $\cos\vartheta$ seinen Werth $\frac{\xi - x}{R}$, so kommt:

$$(58) \qquad X = \varepsilon k \int \frac{\xi - x}{R^2} \, i \, d\omega \ .$$

Vergleicht man diesen Ausdruck von X mit dem in (56) für $\frac{dV}{dx}$ angeführten, so scheint es, als ob beide verschieden seien, während sie doch nach der Bedeutung der Potentialfunction gleich sein müssen. Indessen liegt der Unterschied nur in der Form und nicht im Werthe der Ausdrücke.

Es lässt sich nämlich beweisen, dass für jede geschlossene Fläche folgende Gleichung gilt:

$$(59) \qquad \int \frac{\xi - x}{R^2} \, i d\omega = - \int \frac{\alpha}{R} d\omega \ ,$$

und mittelst dieser Gleichung kann man, wie leicht ersichtlich ist, die Ausdrücke (56) und (58) gegenseitig in einander verwandeln. Den Beweis für die Richtigkeit der angeführten Gleichung will ich, um den Gang der anderen Betrachtungen nicht zu sehr zu unterbrechen, in einer Anmerkung führen[1].

---

1) Wir gehen bei dem Beweise von der Gleichung (57) aus, welche, wie im Texte erörtert ist, durch eine einfache Umgestaltung zu der Gleichung (58) führt, und wollen beweisen, dass sich aus ihr bei einer anderen Art der Umgestaltung, unter der Voraussetzung, dass die Fläche ganz geschlossen ist, auch folgende Gleichung ableiten lässt:

$$(\mathrm{a}) \qquad X = - \int \frac{\alpha}{R} \, d\omega \ .$$

Durch die Verbindung dieser Gleichung mit der Gleichung (58) ergiebt sich dann die Gleichung (59), welche bewiesen werden soll.

§. 20.

Wir wenden uns nun zum Beweise der Gleichung (II) für den Fall, dass der Körper nicht homogen ist.

Wir führen, um das Element $d\sigma$ auszudrücken, Polarcoordinaten ein, indem wir die durch den Punct p gehende mit der x-Axe parallele Gerade als Axe nehmen, und dann unter ϑ, wie vorher, den Winkel des Leitstrahles mit der Axe verstehen, und mit φ den Winkel bezeichnen, welchen die durch die Axe und den Leitstrahl gelegte Ebene mit einer anderen durch die Axe gehenden festen Ebene bildet. Dadurch geht die Gleichung (57) über in:

$$\text{(b)} \qquad X = \varepsilon k \iint (\pm R_1 \pm R_2 \pm \text{etc.}) \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \ .$$

Hierin wollen wir unsere Aufmerksamkeit zunächst nur auf das Integral nach ϑ richten, welches wir der Kürze wegen durch einen einfachen Buchstaben bezeichnen wollen, indem wir setzen:

$$\text{(c)} \qquad J = \int (\pm R_1 \pm R_2 \pm \text{etc.}) \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta \ .$$

Dieses Integral bezieht sich auf die Curve, in welcher eine von der Axe aus nach der durch den Winkel φ bestimmten Richtung gehende Ebene die Oberfläche des Körpers schneidet, und es ist für unseren Zweck vortheilhaft das Bogenelement ds dieser Curve statt des Winkelelementes $d\vartheta$ anzuwenden. Wenn an der Stelle, von wo aus wir die Länge s des Bogens rechnen wollen, der Leitstrahl die Oberfläche in der Richtung von Innen nach Aussen durchschneidet, so nehmen wir s nach der Seite hin als wachsend an, wohin ϑ wächst, im anderen Falle umgekehrt, so dass $\frac{d\vartheta}{ds}$ im ersteren Falle positiv im letzteren negativ ist. Wenn dann die Curve in ihrem weiteren Verlaufe sich so biegt, dass die Durchschnittsrichtung des Leitstrahles sich umkehrt, so macht es sich von selbst, dass an derselben Stelle auch $\frac{d\vartheta}{ds}$ sein Vorzeichen ändert. Demnach hat $\frac{d\vartheta}{ds}$ immer dasselbe Vorzeichen, mit welchem der zu diesem Bogenelemente gehörige Leitstrahl R in der vorigen Gleichung zu nehmen ist, und man kann daher statt $\pm R d\vartheta$ schreiben $R\frac{d\vartheta}{ds}ds$. Da ferner zu jedem Elementarwinkel $d\vartheta$ gerade so viele Bogenelemente ds gehören, als die vorige Gleichung verschiedene Werthe von R enthält, so geht die Gleichung über in:

$$\text{(d)} \qquad J = \int R \cos\vartheta \sin\vartheta \frac{d\vartheta}{ds} ds \ ,$$

Es soll vorläufig wieder vorausgesetzt werden, dass p nicht in unmittelbarer Nähe der Oberfläche liege, und ferner dass die Dichtigkeit k des Körpers sich stetig ändere, oder, wenn

---

worin R und ϑ, da der Winkel φ bei der Integration constant ist, als Functionen von s zu betrachten sind.

Wir wollen nun den zu integrirenden Ausdruck in zwei Factoren zerlegen, welche in der folgenden Gleichung durch einen Punct von einander getrennt sind:

$$J=\int R\sin\vartheta \;.\; \cos\vartheta\frac{d\vartheta}{ds}\,ds$$

und auf dieses Product wollen wir die Methode der theilweisen Integration anwenden. Da das Integral von $\cos\vartheta\frac{d\vartheta}{ds}ds$ einfach $\sin\vartheta$ ist, so erhalten wir, wenn wir die Grenzwerthe von R und ϑ mit R', ϑ' und R'', ϑ'' bezeichnen:

$$(e)\qquad J=R''\sin^2\vartheta''-R'\sin^2\vartheta'-\int\sin\vartheta\,\frac{d(R\sin\vartheta)}{ds}\,ds\;.$$

Die beiden ersten Glieder dieses Ausdruckes sind entweder gleich Null, oder, wenn sie angebbare Werthe haben, so heben sie sich gegenseitig auf. Da nämlich unsere Integration von der geschlossenen Durchschnittscurve, welche die Ebene mit der Körperoberfläche bildet, nur den Theil umfassen soll, welcher an der einen Seite der Axe liegt (denn die nach der entgegengesetzten Seite der Axe gehende andere Hälfte derselben Ebene entspricht einem anderen Werthe von φ, der um 180° von dem hier angenommenen verschieden ist), so sind in Bezug auf die Grenzen der Integration zwei Fälle möglich. 1) Wenn von der Curve nur ein Stück an der einen Seite der Axe liegt, so liegen die beiden Endpuncte dieses Stückes in der Axe selbst, und die Grenzwerthe ϑ' und ϑ'' des Winkels ϑ sind daher entweder 0 oder π, woraus folgt dass $\sin\vartheta'$ und $\sin\vartheta''$, und mit ihnen jene beiden Glieder einzeln gleich Null werden. 2) Wenn die ganze geschlossene Curve an der einen Seite der Axe liegt, so fällt ihr Endpunct mit dem Anfangspuncte zusammen. Die beiden Grenzwerthe sowohl von R als auch von ϑ sind also unter einander gleich, und jene beiden Glieder heben sich gegenseitig auf. Es kann auch vorkommen, dass die beiden erwähnten Fälle zugleich stattfinden oder einer von ihnen sich mehrmals wiederholt, da die Durchschnittscurve einer Ebene mit der Körperoberfläche aus mehreren in sich geschlossenen Theilen bestehen kann; aber dadurch wird an dem Resultate, dass die beiden ersten Glieder des vorigen Ausdruckes fortfallen, nichts geändert. Es bleibt also nur das letzte Glied zu betrachten, und wenn wir dieses noch dadurch abändern, dass wir es mit R multipliciren und dividiren, so kommt:

sprungweise Aenderungen vorkommen, dass diese nicht in unmittelbarer Nähe des Punctes p stattfinden, so dass man sich um diesen Punct eine geschlossene Fläche, welche überall um einen endlichen Abstand von p entfernt ist, beschrieben denken kann,

---

$$\text{(f)} \qquad J = -\int \frac{R\sin\vartheta \frac{d(R\sin\vartheta)}{ds}\, ds}{R} \,.$$

Dieser Ausdruck muss nun noch, um den vollständigen Ausdruck von X zu erhalten, gemäss der Gleichung (b), mit $d\varphi$ multiplicirt und mit dem zweiten Integralzeichen und dem Factor εk versehen werden. Es kommt also:

$$\text{(g)} \qquad X = -\varepsilon k \iint \frac{R\sin\vartheta \frac{d(R\sin\vartheta)}{ds}\, ds\, d\varphi}{R} \,.$$

Der Zähler des Bruches, welcher hier unter dem Integralzeichen steht, hat eine einfache geometrische Bedeutung. Das Product $R\sin\vartheta$ ist die Projection des Leitstrahles R auf eine auf der Axe senkrechte Ebene, und demnach ist, wie man leicht sieht, der ganze Zähler seinem absoluten Werthe nach die auf dieselbe Ebene bezogene Projection desjenigen Elementes der Oberfläche, welches den Elementen ds und $d\varphi$ entspricht, welche Projection, abgesehen vom Vorzeichen, durch $\alpha d\omega$ dargestellt wird, wenn, wie früher, $d\omega$ das Oberflächenelement, und α den den Cosinus des Winkels zwischen der darauf errichteten Normale und der Axe bedeutet. Was die Vorzeichen anbetrifft, so kann man sich durch eine nähere Betrachtung des Gegenstandes leicht davon überzeugen, dass in Folge dessen, was über den Sinn, in welchem s als wachsend angenommen wird, gesagt ist, die Grösse $\frac{d(R\sin\vartheta)}{ds}$, welche allein in jenem Zähler ihr Vorzeichen ändern kann, immer dasselbe Vorzeichen hat, wie der mit α bezeichnete Cosinus, wobei ich daran erinnern will, dass die Normale, auf welche sich α bezieht, immer in der Richtung vom Körper nach Aussen hin betrachtet wird. Man kann also schreiben:

$$R\sin\vartheta \frac{d(R\sin\vartheta)}{ds}\, ds\, d\varphi = \alpha d\omega \,,$$

und dadurch geht die vorige Gleichung über in die oben unter (a) angeführte Gleichung:

$$X = -\varepsilon k \int \frac{\alpha}{R}\, d\omega \,,$$

durch deren Verbindung mit der Gleichung (58) man die zu beweisende Gleichung (59) erhält.

innerhalb deren nur stetige Dichtigkeitsänderungen vorkommen. Auf den von dieser Fläche eingeschlossenen Theil des Körpers können wir dann unsere Betrachtung beschränken, denn der Theil des Körpers, welcher ausserhalb dieser Fläche liegt, und dessen Elemente sich daher alle in endlicher Entfernung von p befinden, kann auf den Werth von DV keinen Einfluss haben, da der auf ihn bezügliche Theil von DV unseren früheren Ergebnissen gemäss Null sein muss. Der Fall, wo in unmittelbarer Nähe des Punctes p eine sprungweise Aenderung stattfindet, worin zugleich der Fall, wo p in unmittelbarer Nähe der Oberfläche liegt, mit einbegriffen ist, bedarf noch einer besonderen Bemerkung, welche nachträglich hinzugefügt werden wird.

Ferner soll der Einfachheit wegen vorausgesetzt werden, dass der betrachtete Körper so gestaltet sei, dass jeder von p ausgehende Leitstrahl die Oberfläche nur Einmal schneidet. Sollte die Gestalt des gegebenen Körpers diese Bedingung nicht erfüllen, so kann man sich wieder durch eine gedachte Fläche einen Theil von der gewünschten Form aus dem ganzen Körper aussondern, und diesen allein betrachten.

Wir wollen nun zunächst die Componenten der von dem Körper auf den Punct p ausgeübten Kraft bestimmen, da wir wissen, dass diese Kraftcomponenten mit den ersten Differentialcoefficienten der Potentialfunction identisch sind.

Für die nach der x-Richtung gehende Componente haben wir nach Gleichung (26), wenn wir den Cosinus des Winkels, welchen der Leitstrahl mit der x-Axe bildet, mit a bezeichnen:

$$X = \varepsilon \iint k\, a\, dr\, d\sigma \;,$$

worin die Integration nach r von 0 bis R, d. h. bis zu dem Werthe, welchen r im Durchschnittspuncte mit der Oberfläche hat, und die zweite Integration über den ganzen körperlichen Winkelraum ausgedehnt werden muss. Da die Grösse a von r unabhängig ist, so kann man den vorigen Ausdruck auch so schreiben:

(60) $$X = \varepsilon \int d\sigma\, a \int_0^R k\, dr \; .$$

Hierin wollen wir das Integral $\int_0^R k\, dr$ in eine etwas andere Form bringen, indem wir statt r eine andere Veränderliche einführen. Wenn wir in einem Leitstrahle, welcher von p bis zur Oberfläche gezogen ist, irgend einen Punct betrachten, so wird dessen Abstand von p mit r bezeichnet; wir wollen nun den Abstand desselben Punctes von dem anderen Endpuncte des Leitstrahles, wo dieser die Oberfläche schneidet, mit ϱ bezeichnen. Dann ist:

$$r = R - \varrho$$
$$dr = -d\varrho \; .$$

Ferner sind die Grenzen von ϱ, welche den Grenzen 0 und R von r entsprechen, R und 0, und wir bekommen also:

$$\int_0^R k\, dr = -\int_R^0 k\, d\varrho = \int_0^R k\, d\varrho \; .$$

Ausserdem wollen wir statt des Elementes $d\sigma$ des körperlichen Winkels das Element $d\omega$ der Oberfläche des Körpers einführen. Dazu haben wir nach Gleichung (34), in welcher wir für unseren Fall von den beiden Vorzeichen das obere zu wählen haben, weil alle Leitstrahlen die Oberfläche in der Richtung von Innen nach Aussen durchschneiden:

$$d\sigma = \frac{i}{R^2}\, d\omega \; .$$

Die Gleichung (60) geht also über in:

(61) $$X = \varepsilon \int d\omega\, a\, \frac{i}{R^2} \int_0^R k\, d\varrho \; .$$

Aus dieser Formel für die Componente X können wir ohne Weiteres auch diejenigen für die Componenten Y und Z ableiten. Da nämlich a die einzige in der Formel vorkommende Grösse ist, welche auf die x-Axe Bezug hat, so brauchen wir für diese nur die entsprechenden auf die beiden anderen Axen bezüglichen Grössen b und c (die Cosinus der Winkel, welche derselbe

Leitstrahl mit der y- und z-Axe bildet), zu substituiren. Setzen wir dabei noch zur Abkürzung:

$$K = \frac{i}{R^2}\int_0^R k\,d\varrho \tag{62}$$

so kommt:

$$\left\{\begin{aligned} X &= \varepsilon\int a K d\omega \\ Y &= \varepsilon\int b K d\omega \\ Z &= \varepsilon\int c K d\omega \ . \end{aligned}\right. \tag{63}$$

Diese Formeln müssen nun differentiirt werden, die erste nach x, die zweite nach y und die dritte nach z. Da die Integration nach einer Grösse stattfindet, welche von diesen drei Veränderlichen unabhängig ist, so können wir unter den Integralzeichen differentiiren.

Die unter den Integralzeichen stehenden Ausdrücke enthalten die Veränderlichen x, y und z nicht unmittelbar, sondern nur dadurch, dass die Grössen a, b, c und R, welche in ihnen vorkommen, von jenen Veränderlichen abhängen. Betrachten wir nämlich den durch die Gleichung (62) näher bestimmten Factor K, so ist darin nach §. 16 zu setzen:

$$i = a\alpha + b\beta + c\gamma \ ,$$

worin die Grössen α, β und γ, welche die Richtung der auf $d\omega$ errichteten Normale angeben, von x, y und z unabhängig sind. Die Grösse k, welche in (62) nach ϱ integrirt werden soll, ist zwar ursprünglich als Function von x', y' und z' (den rechtwinkligen Coordinaten des Punctes, für welchen k die Dichtigkeit darstellt) gegeben; diese Veränderlichen müssen wir uns aber zur Ausführung der Integration durch a, b, c und ϱ ersetzt denken, von denen dann die drei ersten für die vorgeschriebene Integration, welche sich nur auf die Puncte eines bestimmten Leitstrahles bezieht, constant bleiben, und nur die letzte veränderlich ist. Nennen wir, wie früher, die Coordinaten des Punctes, wo der Leitstrahl die Oberfläche schneidet, ξ, η, ζ, während die Coordinaten eines anderen in dem Leitstrahle liegenden Punctes, welcher von jenem um ϱ entfernt ist, x', y', z' heissen, so haben wir:

$$a = \frac{\xi - x'}{\varrho}$$

und entsprechend für die beiden anderen Cosinus, woraus folgt:

$$x' = \xi - a\varrho$$
$$y' = \eta - b\varrho$$
$$z' = \zeta - c\varrho \ .$$

Durch Einsetzung dieser Werthe von x', y' und z' geht die Grösse k, wie es oben gefordert wurde, in eine Function von a, b, c und ϱ über, und wenn man diese nach ϱ von 0 bis R integrirt, so erhält man eine Function von a, b, c und R. Demnach ist auch die ganze Grösse K als eine Function von a, b, c und R zu betrachten, während diese letzteren vier Grössen selbst als Functionen von x, y und z gegeben sind, indem nach §. 16 ist:

$$a = \frac{\xi - x}{R}\ ; \quad b = \frac{\eta - y}{R}\ ; \quad c = \frac{\zeta - z}{R}$$
$$R = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2} \ .$$

Wir können also schreiben:

$$\frac{d(aK)}{dx} = \frac{d(aK)}{da}\frac{da}{dx} + \frac{d(aK)}{db}\frac{db}{dx} + \frac{d(aK)}{dc}\frac{dc}{dx} + \frac{d(aK)}{dR}\frac{dR}{dx}$$
$$= K\frac{da}{dx} + a\left(\frac{dK}{da}\frac{da}{dx} + \frac{dK}{db}\frac{db}{dx} + \frac{dK}{dc}\frac{dc}{dx} + \frac{dK}{dR}\frac{dR}{dx}\right).$$

Hierin ist in Folge der vorigen Werthe von a, b, c und R zu setzen:

$$\frac{da}{dx} = \frac{-1 + a^2}{R}\ ; \quad \frac{db}{dx} = \frac{ab}{R}\ ; \quad \frac{dc}{dx} = \frac{ac}{R}\ ; \quad \frac{dR}{dx} = -a$$

wodurch kommt:

$$\frac{d(aK)}{dx} = \frac{-1 + a^2}{R}K - \frac{a}{R}\frac{dK}{da} + \frac{a^2}{R}\left(a\frac{dK}{da} + b\frac{dK}{db} + c\frac{dK}{dc}\right) - a^2\frac{dK}{dR} \ .$$

Ganz entsprechende Ausdrücke ergeben sich für $\frac{d(bK)}{dy}$ und $\frac{d(cK)}{dz}$, und man erhält also im Ganzen:

$$(64)\quad\begin{cases}\dfrac{dX}{dx}=\varepsilon\displaystyle\int\left\{\dfrac{-1+a^2}{R}K-\dfrac{a}{R}\dfrac{dK}{da}+\dfrac{a^2}{R}\left(a\dfrac{dK}{da}+b\dfrac{dK}{db}+c\dfrac{dK}{dc}\right)-a^2\dfrac{dK}{dR}\right\}d\omega\\[2ex] \dfrac{dY}{dy}=\varepsilon\displaystyle\int\left\{\dfrac{-1+b^2}{R}K-\dfrac{b}{R}\dfrac{dK}{db}+\dfrac{b^2}{R}\left(a\dfrac{dK}{da}+b\dfrac{dK}{db}+c\dfrac{dK}{dc}\right)-b^2\dfrac{dK}{dR}\right\}d\omega\\[2ex] \dfrac{dZ}{dz}=\varepsilon\displaystyle\int\left\{\dfrac{-1+c^2}{R}K-\dfrac{c}{R}\dfrac{dK}{dc}+\dfrac{c^2}{R}\left(a\dfrac{dK}{da}+b\dfrac{dK}{db}+c\dfrac{dK}{dc}\right)-c^2\dfrac{dK}{dR}\right\}d\omega.\end{cases}$$

Bei der Addition dieser Gleichungen heben sich die meisten Glieder gegenseitig auf, und es bleibt nur:

$$(65)\qquad \frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=-\varepsilon\int\left(2\frac{K}{R}+\frac{dK}{dR}\right)d\omega\ .$$

Zur Bildung des hierin vorkommenden Differentialcoefficienten $\frac{dK}{dR}$ wenden wir die Gleichung (62) an. Daraus ergiebt sich:

$$(66)\qquad \frac{dK}{dR}=-2\frac{1}{R^3}\int_0^R k\,d\varrho+\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\int_0^R k\,d\varrho\ .$$

Im ersten Gliede an der rechten Seite können wir statt des Integrales wiederum die Grösse K einführen, wodurch es übergeht in:

$$-2\frac{K}{R}\ .$$

Der im zweiten Gliede vorkommende Differentialcoefficient des Integrales nimmt eine sehr einfache Gestalt an. Es ist bekanntlich allgemein:

$$\frac{d}{dR}\int_0^R f(\varrho)\,d\varrho=f(R)\ ,$$

wir haben also in der Formel welche k als Function von a, b, c und ϱ darstellt, nur R an die Stelle von ϱ zu setzen. Dadurch erhalten wir denjenigen Werth, welchen k im Puncte p hat, und welchen wir durch k_p bezeichnet haben, und es kommt somit:

$$\frac{d}{dR}\int_0^R k\,d\varrho=k_p\ .$$

Demnach geht die Gleichung (66) über in:

$$(67)\qquad \frac{dK}{dR}=-2\frac{K}{R}+\frac{1}{R^2}k_p\ .$$

Wenn man diesen Werth von $\frac{dK}{dR}$ in (65) einsetzt, so heben sich wieder zwei Glieder auf, und es kommt, wenn wir die Grösse k_p, welche für die Integration constant ist, aus dem Integralzeichen herausnehmen:

$$(68) \qquad \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = -\varepsilon k_p \int \frac{i}{R^2} d\omega \ .$$

Der hier unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck lässt sich wieder durch das Element $d\sigma$ des körperlichen Winkels ersetzen, worauf dann die Integration sofort ausgeführt werden kann, und den ganzen körperlichen Winkelraum 4π giebt. Es kommt also:

$$(69) \qquad \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = -\varepsilon k_p \int d\sigma$$
$$= -4\pi \varepsilon k_p \ ,$$

oder da die linke Seite nichts anderes als DV bedeutet:

$$DV = -4\pi \varepsilon k_p$$

was zu beweisen war.

§. 21.

Bei der Führung dieses Beweises ist vorausgesetzt, dass p nicht in unmittelbarer Nähe der Oberfläche liege, und dass die Dichtigkeit des Körpers sich in unmittelbarer Nähe von p nicht sprungweise ändere.

Was die Lage in der Nähe der Oberfläche anbetrifft, so ist bei homogenen Körpern durch eine besondere Betrachtung gezeigt worden, dass, wenn die Oberfläche nicht gerade an der betreffenden Stelle eine Spitze oder Kante bildet, die Gleichung (II) bis in unmittelbare Nähe der Oberfläche gültig bleibt. Eine ähnliche Betrachtung könnten wir auch für die nicht homogenen Körper anstellen, indessen würde sie hier etwas weitläufiger werden, und ich glaube, dass es genügt, sie für den einfacheren Fall wirklich ausgeführt zu haben. Die wesentliche Eigenschaft der Oberfläche, um derentwillen sie überhaupt eine besondere Betrachtung nöthig macht, nämlich die, dass in ihr eine sprungweise Aenderung der Dichtigkeit eintritt, indem sie zwei Räume von einander scheidet, in deren einem die Dichtigkeit einen angebbaren Werth hat, während sie im anderen Null ist, findet in beiden Fällen statt, und wenn daher im einen Falle nachgewiesen ist, dass diese Eigenschaft nicht zur Folge hat, dass die Gleichung, welche im Innern des einen und des anderen der beiden Räume gültig ist, in der Nähe der Trennungsfläche ungültig wird, so kann man dasselbe auch für den anderen Fall annehmen.

Auf den vorigen Fall lässt sich auch derjenige zurückführen, wo der Punct zwar tief im Inneren des Körpers liegt, aber die Dichtigkeit des Körpers in der Nähe des Punctes eine sprungweise Aenderung erleidet.

Es sei ein Körper gegeben, der durch eine innere Fläche in zwei Theile getheilt wird, welche sich in Bezug auf ihre Dichtigkeit verschieden verhalten. Die Dichtigkeit des einen sei durch k' dargestellt, welches Zeichen eine Function der Raumcoordinaten bedeuten soll, die sich nur stetig ändert. Die Dichtigkeit des anderen sei $k'+k''$, worin k' dieselbe Function ist, wie vorher, und k'' eine andere Function, die sich, soweit sie gilt, ebenfalls nur stetig ändert, die aber von jener Fläche an, obwohl sie in derselben noch einen endlichen Werth hat, nach der einen Seite hin ungültig wird, so dass also der Werth, welchen k'' in der Fläche hat, die Grösse des Sprunges darstellt. Dann denken wir uns in dem Raume, wo die Dichtigkeit $k'+k''$ ist, zwei Körper so über einander gelagert, dass sie beide denselben Raum ausfüllen, einen mit der Dichtigkeit k' und den anderen mit der Dichtigkeit k''. Der erstere bildet mit dem an der entgegengesetzten Seite der Fläche befindlichen Körpertheile einen zusammenhängenden Körper, dessen Dichtigkeit überall durch die stetige Function k' dargestellt wird, und welchen wir C' nennen wollen. Den letzteren dagegen, mit der Dichtigkeit k'', betrachten wir als einen für sich bestehenden Körper, welcher C'' heisse, und welcher jene Trennungsfläche als einen Theil seiner Oberfläche hat.

Hiernach kann man sich die Potentialfunction V des ganzen gegebenen Körpers in die Potentialfunctionen V' und V'' der beiden Körper C' und C'' zerlegt denken. Dann hat man:

$$V = V' + V''$$

und daraus folgt:

$$DV = DV' + DV'' \; .$$

Die erste der beiden rechts stehenden Grössen ändert sich, wenn der Punct p die Trennungsfläche durchschreitet, nur stetig, weil der Punct dabei im Innern des Körpers C' bleibt, und sie wird an beiden Seiten der Fläche durch $-4\pi\varepsilon k'_p$ dargestellt, worin k'_p den bestimmten Werth der Function k' im Puncte p bedeutet. Die zweite Grösse dagegen ändert sich sprungweise. An der einen Seite der Fläche (d. h. ausserhalb des Körpers C''), bis dicht an die Fläche hinan, ist sie $= 0$; an der anderen Seite (d. h. innerhalb des Körpers C'') ebenfalls bis dicht an die Fläche hinan, ist sie $= -4\pi\varepsilon k''_p$. Wir erhalten also im Ganzen:

an der einen Seite der Fläche $DV = -4\pi\varepsilon k'_p$

,, ,, andern ,, ,, ,, $DV = -4\pi\varepsilon(k'_p + k''_p)$.

Bezeichnen wir, wie früher, die ganze Dichtigkeit mit k, wobei k aber jetzt eine Function darstellt, die eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet, indem an der einen Seite der Fläche $k = k'$, und an der anderen $k = k' + k''$ ist, so können wir die beiden vorigen Gleichungen in Eine überall gültige Gleichung zusammenfassen:

$$DV = -4\pi\varepsilon k_p \; ,$$

welches wieder unsere Gleichung (II) ist. In der Fläche selbst hat die Dichtigkeit keinen bestimmten Werth, und die Gleichung drückt daher aus, dass in dieser Fläche auch DV unbestimmt ist.

Nur in dem Falle, wenn in unmittelbarer Nähe des Punctes p eine sprungweise Aenderung der Dichtigkeit stattfindet, und zugleich die Fläche, in welcher sie stattfindet, an der betreffenden Stelle eine Spitze oder Kante bildet, wird die Gleichung (II) ungültig, gerade so, wie in dem entsprechenden Falle in der Nähe der Oberfläche.

§. 22.

Es kommt zuweilen der Fall vor, dass man eine Quantität eines Agens zu betrachten hat, von welcher man annimmt, dass sie nicht einen Raum stetig ausfüllt, sondern nur über eine Fläche stetig verbreitet ist. So ist es z. B. bekannt, dass freie Electricität, welche einem leitenden Körper mitgetheilt wird, im Gleichgewichtszustande nicht das Innere des Körpers erfüllt, sondern nur an der Oberfläche desselben angehäuft ist. Es kann zwar in der Wirklichkeit nicht eine mathematische Fläche sein, welche die Electricitätsmenge enthält, sondern man muss sich eine Schicht von sehr geringer Dicke denken; indessen in der Rechnung wird bei den meisten Untersuchungen diese Dicke vernachlässigt, und man denkt sich die ganze Electricitätsmenge in einer mathematischen Fläche befindlich.

Wir müssen nun untersuchen, ob unter dieser Bedingung die Potentialfunction und ihre Differentialcoefficienten neue bemerkenswerthe Eigenschaften zeigen.

§. 23.

Wir wollen zunächst wieder einen einfachen speciellen Fall zur Betrachtung auswählen, welcher besonders geeignet ist, die mit dieser Bedingung verknüpften Eigenthümlichkeiten klar hervortreten zu lassen, und nach dessen Behandlung dann die allgemeine Betrachtung kürzer gefasst werden kann, als es sonst ohne Beeinträchtigung der Verständlichkeit möglich wäre. Wir wollen nämlich vorläufig annehmen, dass die mit dem Agens bedeckte Fläche ein Stück einer Ebene, und dass die Vertheilung des Agens über dieselbe gleichförmig sei.

Wenn die auf einem Elemente $d\omega$ der Fläche befindliche Menge des Agens $hd\omega$ ist, so nennen wir h die Dichtigkeit des Agens, und wo es zur Unterscheidung nothwendig ist, können wir diese Dichtigkeit, welche sich auf eine Fläche bezieht im Gegensatze zu der gewöhnlichen, welche sich auf den körperlichen Raum bezieht, **Flächendichtigkeit** nennen. Ist nun r der Abstand des Elementes $d\omega$ von dem Puncte p, so haben wir zur Bestimmung der Potentialfunction die Gleichung:

$$V = \varepsilon h \int \frac{d\omega}{r} , \tag{70}$$

worin die Integration über den Flächeninhalt der ebenen Figur, welche mit dem Agens bedeckt ist, ausgeführt werden muss.

Um das Integral in eine für unseren Zweck geeignete Form zu bringen, nehmen wir die Ebene, welche die Figur enthält, zur xy-Ebene unseres Coordinatensystemes. Wenn wir dann vom Puncte p mit den Coordinaten x, y und z ein Perpendikel auf diese Ebene fällen, und dessen Fusspunct betrachten, so hat dieser ebenfalls die Coordinaten x und y, während seine dritte Coordinate Null ist. Diesen Fusspunct wollen wir nun zum Mittelpuncte eines Systemes von Polarcoordinaten in der Ebene nehmen, in welchem der Leitstrahl u, und der Winkel desselben mit der x-Axe φ heissen soll. Dann können wir setzen:

$$d\omega = u\, du\, d\varphi ,$$

und zugleich haben wir, wenn ξ und η die rechtwinkligen Coordinaten dieses Flächenelementes sind:

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} \\ r &= \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2} \\ &= \sqrt{u^2 + z^2} \end{aligned}$$

und die Gleichung für V geht daher über in:

$$V = \varepsilon h \iint \frac{u\, du\, d\varphi}{\sqrt{u^2 + z^2}} . \tag{71}$$

Hierin lässt sich die Integration nach u sogleich ausführen. Man hat nämlich allgemein:

$$\int \frac{u\, du}{\sqrt{u^2 + z^2}} = \sqrt{u^2 + z^2}$$

und es kommt nur darauf an, die den Umständen entsprechenden Grenzwerthe in diese Formel einzusetzen. Dabei macht es einen wesentlichen Unterschied, ob der Fusspunct des von p auf die Ebene gefällten Perpendikels innerhalb oder ausserhalb der mit dem Agens bedeckten Figur liegt. Für unsere weiteren Betrachtungen ist nur der Fall von Interesse, wo er innerhalb liegt, und diesen Fall wollen wir daher voraussetzen.

Dann ist das Integral vom Anfangspuncte des Leitstrahles bis zu seinem Durchschnittspuncte mit dem Umfange der Figur zu nehmen, und wenn die Figur so gestaltet ist, dass der Leitstrahl den Umfang mehrmals schneidet, was dann jedenfalls eine ungerade Anzahl von Malen geschehen muss, so kommen noch die Stücke vom zweiten bis zum dritten Durchschnitte, dann vom vierten bis zum fünften Durchschnitte u. s. f. in Betracht. Nennen wir also die den einzelnen Durchschnitten entsprechenden Werthe von u der Reihe nach U_1, U_2 etc. und setzen ferner zur Abkürzung:

$$R_1 = \sqrt{U_1^2 + z^2}\ ; \quad R_2 = \sqrt{U_2^2 + z^2} \text{ etc.}$$

so kommt:

$$V = \varepsilon h \int (-\sqrt{z^2} + R_1 - R_2 + R_3 - \text{ etc.}) d\varphi \ .$$

In dem ersten Gliede innerhalb der Klammer dürfen wir nicht einfach z an die Stelle von $\sqrt{z^2}$ setzen, weil diese Wurzel, welche ein specieller Werth des Abstandes r ist, stets positiv sein muss, während z positive und negative Werthe haben kann. Ich werde daher, um dieses anzudeuten, den Wurzelausdruck in der Formel beibehalten.

Da die Grösse $\sqrt{z^2}$ von φ unabhängig ist, so können wir bei diesem Gliede auch die zweite Integration ohne Weiteres ausführen, und erhalten dadurch, indem das Integral von 0 bis 2π zu nehmen ist:

$$(72) \qquad V = -2\pi \varepsilon h \sqrt{z^2} + \varepsilon h \int (R_1 - R_2 + R_3 - \text{ etc.}) d\varphi \ .$$

Das hierin noch vorkommende Integral können wir in eine andere Gestalt bringen in welcher es für die beabsichtigten Differentiationen geeignet ist. Wir führen dazu statt des Winkelelementes $d\varphi$ das zwischen seinen Schenkeln liegende Element ds des Umfanges ein. Ist i' der Cosinus des Winkels, welchen die auf ds errichtete Normale mit dem Leitstrahle bildet, wobei die Normale nach der Aussenseite des Umfanges, und der Leitstrahl nach der Seite hin, wohin er wächst, betrachtet wird, so hat man:

$$\text{(73)} \qquad \frac{i'}{U} ds = \pm d\varphi \ ,$$

worin das obere oder das untere Vorzeichen zu nehmen ist, jenachdem der Leitstrahl, indem er wächst, den Umfang von Innen nach Aussen oder umgekehrt schneidet. Diese Vorzeichen sind dieselben, mit welchen die in dem Integrale vorkommenden Grössen R_1, R_2, R_3 etc. behaftet sind. Wenn man daher für irgend eins der Producte $\pm R d\varphi$ das Product $\frac{R}{U} i' ds$ substituirt, so muss man diesem letzteren äusserlich immer das Pluszeichen geben. Da ferner in dem Integrale für jedes Winkelelement $d\varphi$ gerade so viele verschiedene Werthe von R vorkommen, als zu dem Winkelelemente verschiedene Bogenelemente gehören, so bilden alle Bogenelemente, die durch jene Substitution eingeführt werden, zusammen den ganzen Umfang der Figur. Demnach kann man schreiben:

$$\text{(74)} \qquad V = -2\pi\varepsilon h \sqrt{z^2} + \varepsilon h \int \frac{R}{U} i' ds \ ,$$

worin das Integral über den ganzen Umfang auszudehnen ist.[1])

---

[1]) Der Vollständigkeit wegen will ich auch anführen, wie die Formel sich gestaltet, wenn der Fusspunct des von p auf die Ebene gefällten Perpendikels ausserhalb der mit dem Agens bedeckten Figur liegt. In diesem Falle muss für jeden Leitstrahl, welcher die Figur überhaupt trifft, die Anzahl der Durchschnitte mit dem Umfange eine gerade sein, und die Integration nach u in der Gleichung (71) bezieht sich auf das Stück vom ersten bis zum zweiten Durchschnitte, dann, falls noch mehr Durchschnitte vorkommen, vom dritten bis zum vierten u. s. f. Man erhält daher statt der Gleichung (72):

$$\text{(a)} \qquad V = \varepsilon h \int (-R_1 + R_2 - \text{etc.})\, d\varphi \ ,$$

worin die Integration nach φ sich nur über den Winkelraum erstreckt, welcher die Figur einschliesst. Wenn man in dieser Gleichung für das Winkelelement $d\varphi$ das Bogenelement ds einführt, so erhält man statt (74):

§. 24.

Wir wollen nun mit Hülfe der letzten Gleichung die Differentialcoefficienten der Potentialfunction bilden.

Da die Grösse s, nach welcher integrirt werden soll, von den Coordinaten x, y und z des Punctes p unabhängig ist, so können wir unter dem Integralzeichen differentiiren. Die Formeln von U, R und i', welche dazu angewandt werden müssen, lassen sich ohne Weiteres hinschreiben. Bezeichnen wir die Coordinaten des Bogenelementes ds mit ξ' und η' und die Cosinus der Winkel, welche die auf dem Elemente errichtete Normale mit der x- und y-Axe bildet, mit α' und β', so kommt:

$$(75)\qquad \begin{cases} U=\sqrt{(\xi'-x)^2+(\eta'-y)^2} \\ R=\sqrt{(\xi'-x)^2+(\eta'-y)^2+z^2} \\ i'=\dfrac{(\xi'-x)\alpha'+(\eta'-y(\beta'}{U} \end{cases}$$

Wenn man, wie wir es im Folgenden thun wollen, voraussetzt, dass der Fusspunct des von p gefällten Perpendikels in endlicher Entfernung vom Umfange der Figur liegt, so sind U und R für alle bei der Integration vorkommenden Elemente endliche Grössen.

$$(\mathrm{b})\qquad V=\varepsilon h\int\frac{R}{U}i'ds\ .$$

Sollte der Fusspunct in unmittelbarer Nähe des Umfanges liegen, so dass für gewisse Bogenelemente die Grösse U unendlich klein wird, so ist (mit Ausnahme des Falles, wo $z=0$ ist, so dass R mit U zugleich verschwindet) das in den Ausdrücken (74) und (b) vorkommende Integral in dieser Form nicht ausführbar. Um sich jedoch einen Ueberblick davon zu verschaffen, welche Werthe das Integral in solchen Fällen annimmt, kann man die ursprünglichen Formen des Integrals, welche in (72) und (a) enthalten sind, betrachten. Dann findet man, dass, wenn der Fusspunct sich so bewegt, dass er den Umfang der Figur von Innen nach Aussen durchschreitet, dabei der Werth des Integrales sprungweise um $2\pi\varepsilon h\sqrt{z^2}$ abnimmt. Dadurch wird der Umstand, dass in der Gleichung (74) eben dieses Product als ein mit dem Minuszeichen versehenes besonderes Glied vorkommt, während es in der Gleichung (b) fehlt, ausgeglichen, so dass der ganze Werth von V keine sprungweise Aenderung erleidet.

Differentiiren wir nun unter Berücksichtigung der vorigen Gleichungen die Gleichung (74) zuerst nach z, so bekommen wir:

$$(76)\qquad \frac{dV}{dz} = -2\pi\varepsilon h\frac{z}{\sqrt{z^2}} + \varepsilon h z\int\frac{i'}{RU}ds\ ,$$

worin der Bruch $\frac{z}{\sqrt{z^2}}$ gleich $+1$ oder -1 ist, jenachdem z positiv oder negativ ist.

Dieselbe Formel kann man auch erhalten, wenn man die Kraftcomponente Z unmittelbar berechnet, worauf wir indessen hier nicht eingehen wollen.

Die Hauptfrage in Bezug auf den für $\frac{dV}{dz}$ gefundenen Ausdruck ist die, wie sich derselbe in unmittelbarer Nähe der mit dem Agens bedeckten Fläche verhält. Lassen wir z unendlich klein und Null werden, so wird das zweite Glied des Ausdruckes, welches den Factor z und ausserdem nur solche Factoren hat, die endlich bleiben, ebenfalls unendlich klein und Null. Anders ist es mit dem ersten Gliede. Dieses ist an der Seite der Fläche, wo z positiv ist, constant gleich $-2\pi\varepsilon h$, und an der anderen Seite, wo z negativ ist, constant gleich $+2\pi\varepsilon h$. Es ändert also seinen Werth in dem Moment, wo p die Fläche durchschreitet, sprungweise um $4\pi\varepsilon h$. Bezeichnen wir die Grenzwerthe, denen $\frac{dV}{dz}$ sich nähert, wenn p von der positiven oder von der negativen Seite aus unendlich nahe an die Fläche heranrückt, resp. mit $\left(\frac{dV}{dz}\right)_{+0}$ und $\left(\frac{dV}{dz}\right)_{-0}$, so kommt:

$$(77)\qquad \left(\frac{dV}{dz}\right)_{+0} = -2\pi\varepsilon h\ ;\ \left(\frac{dV}{dz}\right)_{-0} = +2\pi\varepsilon h$$

$$(78)\qquad \left(\frac{dV}{dz}\right)_{+0} - \left(\frac{dV}{dz}\right)_{-0} = -4\pi\varepsilon h\ .$$

Die letztere Gleichung lässt sich, wie wir weiterhin sehen werden, auch auf den allgemeinen Fall, wo die Fläche gekrümmt, und die Vertheilung des Agens über dieselbe ungleichförmig ist, ausdehnen, und bildet eine neue wichtige Eigenschaft der Potentialfunction.

Wir können nun ebenso die Gleichung (74) unter Berücksichtigung der Gleichungen (75) nach x und y differentiiren. Führen wir dieses zuerst nach x aus, so erhalten wir:

$$(79)\qquad \frac{dV}{dx}=\varepsilon h\int\left[\frac{(R^2+z^2)(\xi'-x)}{RU^3}i'-\frac{R}{U^2}\alpha'\right]ds\ .$$

Dieser Ausdruck lässt sich in eine einfachere Form bringen. Es ist nämlich:

$$\frac{R}{U^2}=\frac{R^2}{RU^2}=\frac{U^2+z^2}{RU^2}=\frac{1}{R}+\frac{z^2}{RU^2}\ ,$$

und wenn man dieses in dem zweiten unter dem Integralzeichen stehenden Gliede einsetzt, so kann man schreiben:

$$(80)\qquad \frac{dV}{dx}=-\varepsilon h\int\frac{\alpha'}{R}ds+\varepsilon h\int\left[\frac{(R^2+z^2)(\xi'-x)}{RU^3}i'-\frac{z^2}{RU^2}\alpha'\right]ds\ .$$

Hierin lässt sich beweisen, dass das zweite Integral für jede ganz geschlossene Curve gleich Null ist[1], so dass nur das erste

---

1) Ich werde diesen Beweis, welcher im Texte die Uebersichtlichkeit der Auseinandersetzungen etwas stören würde, hier als Anmerkung hinzufügen.

Es soll bewiesen werden, dass für jede geschlossene Curve ist:

$$(a)\qquad \int\left[\frac{(R^2+z^2)(\xi'-x)}{RU^3}i'-\frac{z^2}{RU^2}\alpha'\right]ds=0\ .$$

Dabei wollen wir zur Abkürzung die beiden in der eckigen Klammer vorkommenden Glieder mit P und Q bezeichnen, so dass die Gleichung lautet:

$$\int(P-Q)ds=0\ .$$

Nach Gleichung (73) ist:

$$(b)\qquad i'=\pm U\frac{d\varphi}{ds}\ .$$

Ferner ist $\alpha' ds$, abgesehen vom Vorzeichen, die Projection des Bogenelementes ds auf die y-Axe, oder, was dasselbe ist, die Veränderung, welche die Projection des Leitstrahles U auf die y-Axe erleidet, während der Endpunct des Leitstrahles das Bogenelement ds durchläuft. Da nun diese Projection des Leitstrahles $U\sin\varphi$ ist, so kommt:

$$(c)\qquad \alpha'=\pm\frac{d(U\sin\varphi)}{ds}\ .$$

Es bleibt in diesen beiden Gleichungen noch die Wahl der Vorzeichen zu treffen. Betrachten wir in einer zusammenhängenden Curve den Winkel

Integral übrig bleibt. Da der Differentialcoefficient nach y ganz dieselbe Behandlungsweise zulässt, so können wir die beiden sich ergebenden Ausdrücke gleich zusammenschreiben:

---

als Function des Bogens s, so kann im Verlauf der Curve der Differentialcoefficient $\frac{d\varphi}{ds}$ sein Vorzeichen ändern, an denselben Stellen ändert dann aber auch der mit i' bezeichnete Cosinus sein Vorzeichen, so dass man in der Gleichung (b) von den äusserlich hinzugefügten Vorzeichen, je nach dem Sinne, in welchem man s als wachsend betrachtet, entweder immer das obere oder immer das untere beibehalten muss. Dieselbe Uebereinstimmung findet zwischen dem Differentialcoefficienten und dem Cosinus, welche in der Gleichung (c) vorkommen, statt, so dass auch hier äusserlich immer dasselbe Vorzeichen zu setzen ist. Ferner muss, wenn der Sinn, in welchem s als wachsend angesehen wird, so gewählt ist, dass in einer der beiden Gleichungen das obere Vorzeichen gilt, auch in der anderen das obere Vorzeichen genommen werden, wie man leicht daraus sieht, dass für den speciellen Fall, wo der Leitstrahl die Richtung der x-Axe hat, beide Gleichungen in Eine zusammenfallen Wir wollen nun voraussetzen, jene Wahl in Bezug auf s sei in der eben angedeuteten Weise getroffen, so dass in beiden Gleichungen äusserlich das Pluszeichen zu setzen sei.

Berücksichtigen wir dann ausser diesen beiden Gleichungen noch die folgende, welche sich von selbst versteht:

$$\frac{\xi'-x}{U}=\cos\varphi$$

so kommt:

$$P=\frac{R^2+z^2}{RU}\cos\varphi\frac{d\varphi}{ds}$$

$$Q=\frac{z^2}{RU^2}\frac{d(U\sin\varphi)}{ds}$$

$$=\frac{z^2}{RU^2}\sin\varphi\frac{dU}{ds}+\frac{z^2}{RU}\cos\varphi\frac{d\varphi}{ds}\;,$$

und demnach:

$$P-Q=\frac{R}{U}\cos\varphi\frac{d\varphi}{ds}-\frac{z^2}{RU^2}\sin\varphi\frac{dU}{ds}\;. \tag{d}$$

Hierin lassen sich die beiden Glieder an der rechten Seite in der Weise umgestalten, dass sie in einen Differentialcoefficienten zusammengezogen werden können. Bedenkt man, dass:

$$R=\sqrt{U^2+z^2}\;.$$

worin z von s unabhängig ist, und daher:

$$\frac{dR}{ds}=\frac{U}{R}\cdot\frac{dU}{ds}$$

$$(81)\quad \begin{cases} \dfrac{dV}{dx} = -\varepsilon h \displaystyle\int \frac{\alpha'}{R}\, ds \\ \dfrac{dV}{dy} = -\varepsilon h \displaystyle\int \frac{\beta'}{R}\, ds\ . \end{cases}$$

Man sieht sogleich, dass diese Ausdrücke sich, wenn p an die Fläche heranrückt und sie durchschreitet, nirgends sprungweise ändern, und dass sie daher auch anwendbar sind, wenn p in der Fläche selbst liegt.

---

so erhält man:

$$\frac{d\left(\frac{R}{U}\right)}{ds} = \frac{1}{R} \cdot \frac{dU}{ds} - \frac{R}{U^2} \cdot \frac{dU}{ds}$$
$$= \frac{U^2 - R^2}{RU^2} \cdot \frac{dU}{ds}$$
$$= -\frac{z^2}{RU^2} \cdot \frac{dU}{ds}\ .$$

Wendet man diese Gleichung auf das zweite Glied der Gleichung (d) an, und setzt zugleich im ersten Gliede:

$$\cos\varphi\, \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d \sin\varphi}{ds}$$

so kommt:

$$P - Q = \frac{R}{U} \cdot \frac{d\sin\varphi}{ds} + \sin\varphi\, \frac{d\left(\frac{R}{U}\right)}{ds}$$
$$= \frac{d\left(\frac{R}{U}\sin\varphi\right)}{ds}\ .$$

Demnach nimmt das ganze in der Gleichung (a) enthaltene Integral folgende einfache Gestalt an:

$$\int \frac{d\left(\frac{R}{U}\sin\varphi\right)}{ds}\, ds\ .$$

Hierin lässt sich die Integration ohne Weiteres ausführen, und giebt, wenn wir die Grenzwerthe des Integrales durch die Indices 0 und 1 andeuten:

$$\left(\frac{R}{U}\sin\varphi\right)_1 - \left(\frac{R}{U}\sin\varphi\right)_0\ .$$

Für eine geschlossene Curve, bei welcher der Anfang und das Ende des Bogens in einen und denselben Punct zusammenfallen, sind beide Grenzwerthe gleich und heben sich auf, und die zu beweisende Gleichung ist somit erfüllt.

Man kann diese Formeln auch dadurch erhalten, dass man die Kraftcomponenten X und Y unmittelbar berechnet, nur muss man in diesem Falle bei den Integrationen, welche in den Rechnungen vorkommen, wenn die zu integrirenden Functionen für alle Elemente endlich bleiben sollen, voraussetzen, dass die Grösse z nicht unendlich klein oder Null sei, was bei der vorigen Entwickelung nicht nöthig war.

§. 25.

Es ist noch von Interesse, zu erfahren, wie sich unter der gemachten Voraussetzung, dass das wirksame Agens nur über eine Fläche verbreitet ist, die Gleichung (II) verhält. Da sich unter dieser Voraussetzung auf einer endlichen Fläche eine endliche Menge des Agens befindet, die mathematische Fläche aber, wenn man ihre Grösse so bestimmen will, dass man sie als einen Theil des körperlichen Raumes betrachtet, gleich Null zu setzen ist, so folgt daraus, dass die Dichtigkeit des Agens, wenn man sie nicht als Flächendichtigkeit, sondern in dem gewöhnlichen Sinne als Raumdichtigkeit auffasst, unendlich gross ist, und es entsteht daher die Frage ob unter diesen Umständen die Gleichung (II) bis in unmittelbare Nähe der Fläche gültig bleibt.

Wir bilden dazu die zweiten Differentialcoefficienten der Potentialfunction, welche in DV vorkommen. Aus Gleichung (76) ergiebt sich, da der Bruch $\frac{z}{\sqrt{z^2}}$ an der einen oder anderen Seite der Ebene bis an diese selbst hinan constant ist:

$$\begin{aligned}\frac{d^2V}{dz^2}&=\varepsilon h\int\frac{i'}{RU}\,ds-\varepsilon hz^2\int\frac{i'}{R^3U}\,ds\\&=\varepsilon h\int\frac{R^2-z^2}{R^3U}i'\,ds\end{aligned}$$

$$(82)\qquad =\varepsilon h\int\frac{U}{R^3}i'\,ds\ .$$

Ferner ergiebt sich aus den Gleichungen (81):

$$(83)\qquad \begin{cases}\dfrac{d^2V}{dx^2}=-\varepsilon h\displaystyle\int\frac{\xi'-x}{R^3}\,\alpha'\,ds\\[2ex]\dfrac{d^2V}{dy^2}=-\varepsilon h\displaystyle\int\frac{\eta'-y}{R^3}\,\beta'\,ds\end{cases}$$

und somit:

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}=-\varepsilon h\int\frac{(\xi'-x)\alpha'+(\eta'-y)\beta'}{R^3}ds$$

$$(84)\qquad =-\varepsilon h\int\frac{U}{R^3}i'ds\ .$$

Dieser letzte Ausdruck ist dem in (82) für $\frac{d^2V}{dz^2}$ gefundenen gleich und entgegengesetzt, und beide heben sich somit bei der Addition auf, und man erhält:

$$DV=0\ .$$

Die Gleichung (II) gilt hiernach an beiden Seiten der Fläche bis dicht an diese hinan. In der Fläche selbst aber verliert sie ihre Bedeutung, weil hier die Grösse $\frac{z}{\sqrt{z^2}}$ sich sprungweise ändert.

§. 26.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung des allgemeinen Falles, wo die Fläche, welche das Agens enthält, gekrümmt, und die Vertheilung des Agens ungleichförmig ist; indessen wollen wir nicht alle für den einfacheren Fall gemachten Entwickelungen auch hier durchführen, sondern uns darauf beschränken, den in §. 24 gefundenen Satz allgemein zu beweisen. Wir können denselben folgendermaassen aussprechen. In irgend einem Puncte P der Fläche sei eine Normale errichtet; in dieser denken wir uns den Punct p beweglich und bezeichnen seinen Abstand vom Fusspuncte P der Normale mit n, wobei diese Grösse an der einen Seite der Fläche als positiv und an der anderen als negativ gerechnet wird. Dann ist:

$$(\mathrm{IV})\qquad \left(\frac{dV}{dn}\right)_{+0}-\left(\frac{dV}{dn}\right)_{-0}=-4\pi\varepsilon h_p\ ,$$

worin die Indices $+0$ und -0 die Grenzwerthe andeuten sollen, denen $\frac{dV}{dn}$ sich nähert, wenn der Punct p von der positiven oder negativen Seite aus unendlich nahe an die Fläche hinanrückt, und h_p den Werth von h im Puncte P darstellt.

Die Entwickelungen, welche für den Beweis dieses Satzes nöthig sind, sind in vieler Beziehung den in §. 17 enthaltenen ähnlich. Wir legen wieder im Puncte P an die Fläche eine Tangentialebene, und nehmen diese zur xy-Ebene unseres Coordinatensystemes, und die Normale zur z-Axe, so dass $\frac{dV}{dn}$ und $\frac{dV}{dz}$ gleichbedeutend sind. Wir brauchen auch hier von der Fläche nur ein sehr kleines aber endliches Stück um P speciell zu betrachten. Nennen wir nämlich die Potentialfunction dieses kleinen Stückes für sich allein V', und die Potentialfunction der gesammten übrigen Fläche V'', so dass

$$V=V'+V''$$

ist, so sind für $\frac{dV''}{dn}$ die in der vorigen Gleichung enthaltenen Grenzwerthe unter einander gleich, da dieser Differentialcoefficient im Puncte P keine Unterbrechung der Stetigkeit erleiden kann. Es ist also:

$$\left(\frac{dV''}{dn}\right)_{+0}-\left(\frac{dV''}{dn}\right)_{-0}=0\ ,$$

und wenn daher bewiesen werden kann, dass die Gleichung:

$$(85)\qquad \left(\frac{dV'}{dn}\right)_{+0}-\left(\frac{dV'}{dn}\right)_{-0}=-4\pi\varepsilon h_p$$

gilt, so ist damit auch die Gleichung (IV) bewiesen.

Wenn für ein Flächenelement $d\omega$ bei dem Puncte (ξ, η, ζ), wo die Dichtigkeit h stattfindet, der Abstand vom Puncte p mit r bezeichnet wird, indem

$$r=\sqrt{\xi^2+\eta^2+(\zeta-z)^2}$$

ist, so hat man:

$$(86)\qquad V'=\varepsilon\int\frac{h}{r}d\omega\ ,$$

worin die Integration über das betrachtete kleine Flächenstück auszudehnen ist. Hierin wollen wir statt h den gleichbedeutenden Ausdruck:

$$h_p\cdot\gamma+\left(\frac{h}{\gamma}-h_p\right)\gamma$$

schreiben, worin γ, wie in §. 17, den Cosinus des Winkels bedeutet, welchen die auf $d\omega$ errichtete Normale mit der z-Axe bildet, eine Grösse, die bei P selbst gleich 1 und in der Nähe von P wenig von 1 abweichend ist. Dadurch kommt:

$$V' = \varepsilon h_p \int \frac{\gamma}{r} d\omega + \varepsilon \int \left(\frac{h}{\gamma} - h_p\right) \frac{\gamma}{r} d\omega \ ,$$

woraus wir durch Differentiation erhalten:

$$\frac{dV'}{dz} = \varepsilon h_p \int \frac{(\zeta - z)\gamma}{r^3} d\omega + \varepsilon \int \left(\frac{h}{\gamma} - h_p\right) \frac{(\zeta - z)\gamma}{r^3} d\omega \ .$$

Ferner ist, wenn die Cosinus der Winkel, welche die vorher erwähnte Normale auf $d\omega$ mit der x- und y-Axe und mit dem Leitstrahl r bildet, α, β und i heissen:

$$i = \frac{\xi\alpha + \eta\beta + (\zeta - z)\gamma}{r}$$

$$\frac{(\zeta - z)\gamma}{r} = i - \frac{\xi\alpha + \eta\beta}{r} \ ,$$

und die vorige Gleichung geht daher über in:

$$(87) \quad \frac{dV'}{dz} = \varepsilon h_p \int \frac{i}{r^2} d\omega + \varepsilon h_p \int \frac{-\xi\alpha - \eta\beta}{r^3} d\omega + \varepsilon \int \left(\frac{h}{\gamma} - h_p\right) \frac{(\zeta - z)\gamma}{r^3} d\omega .$$

Die drei hierin vorkommenden Integrale wollen wir zur Abkürzung durch die Buchstaben E, F und G bezeichnen, so dass die Gleichung lautet:

$$(87a) \qquad \frac{dV'}{dz} = \varepsilon h_p . E + \varepsilon h_p . F + \varepsilon . G \ .$$

Die beiden letzten dieser Integrale erlauben eine andere Behandlung, als das erste, weil in ihnen die zu integrirenden Functionen Factoren enthalten, welche beim Puncte P gleich Null werden, was in dem ersten nicht der Fall ist. Wir wollen daher das Integral E gesondert und dann die Integrale F und G gemeinsam betrachten.

§. 27.

Wir führen in E statt des Flächenelementes $d\omega$, wie in §. 17, das Element $d\sigma$ des körperlichen Winkels ein, und erhalten:

stattfindenden unendlich kleinen Werthe des Bruches immer kleiner bis Null werden. Daraus folgt, dass, wenn man die in $F'-A$ und G' angedeutete Integration nach u von $u=0$ bis zu einem beliebigen endlichen Werthe von u ausführt, man dadurch Grössen erhalten muss, die mit z zugleich unendlich klein und Null werden.

Man kann dieses letztere Resultat auch noch auf eine andere Art beweisen, welche vielleicht noch klarer ist. Betrachten wir zuerst die Grösse $F'-A$, so ist darin der vorher besprochene Bruch mit dem Factor m' behaftet, welcher von u abhängt. Wenn nun die Integration nach u zwischen irgend zwei Grenzen ausgeführt werden soll, so kann man sicher sein, dass das dadurch entstehende Integral seinem Werthe nach zwischen denjenigen beiden Integralen liegt, welche man erhält, wenn man statt der veränderlichen Grösse m' ein Mal den grössten Werth, welchen sie zwischen jenen beiden Grenzen von u hat, und das andere Mal den kleinsten Werth setzt, und dann die Integration ausführt. Wenn man daher findet, dass diese beiden letzten Integrale unendlich klein oder Null werden, so muss man schliessen, dass dasselbe auch mit jenem ursprünglich gegebenen Integrale der Fall ist. Ebenso verhält es sich mit der Grösse G' in Bezug auf den Factor n. Nun lässt sich aber in beiden Grössen, wenn man für m' und n constante Werthe setzt, die Integration nach u sofort wirklich ausführen. Bezeichnen wir die constanten Werthe zum Unterschiede mit m_1' und n_1 und integriren von $u=0$ bis $u=U$, wo U irgend einen endlichen Werth bedeuten soll, so kommt:

$$m_1'\int_0^U \frac{(u^2+z^2)^{\frac{3}{2}}-u^3}{(u^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,du = m_1'\left(U-\frac{U^2+2z^2}{\sqrt{U^2+z^2}}+2\sqrt{z^2}\right)$$

$$n_1\int_0^U \frac{zu^2}{(u^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,du = n_1\left[-\frac{zU}{\sqrt{U^2+z^2}}+z\log(U+\sqrt{U^2+z^2})-z\log(\sqrt{z^2})\right].$$

nahe, so erhält man für diese beiden Lagen zwei körperliche Winkel, welche sich zu 4π ergänzen.

Bilden wir nun die Differenz $E_{+0}-E_{-0}$, so ist darin die erste Grösse E_{+0} an sich negativ, und die zweite E_{-0} ist an sich positiv, hat aber äusserlich das Minuszeichen; folglich sind die absoluten Werthe beider Grössen zu addiren, und die Summe ist mit dem Minuszeichen zu versehen. Das giebt nach dem, was über die durch die absoluten Werthe dargestellten Winkel gesagt ist:

$$E_{+0}-E_{-0}=-4\pi\ . \tag{88}$$

§. 28.

Wir betrachten nun die beiden anderen in der Gleichung (87) vorkommenden Integrale F und G. Diese lauten:

$$\left\{\begin{aligned} F&=\int\frac{-\xi\alpha-\eta\beta}{r^3}d\omega\\ G&=\int\left(\frac{h}{\gamma}-h_p\right)\frac{\zeta-z}{r^3}\gamma\,d\omega\ . \end{aligned}\right. \tag{89}$$

Es soll nun bewiesen werden, dass diese Integrationen bestimmt ausführbar sind, und dass, wenn z von einem kleinen negativen Werthe durch Null zu einem positiven übergeht, die Integrale dabei keine sprungweise Aenderung erleiden.

In dem ersten können wir, wie in §. 17, setzen:

$$\alpha=-\frac{d\zeta}{d\xi}\gamma\ ;\quad \beta=-\frac{d\zeta}{d\eta}\gamma\ ,$$

wodurch es übergeht in:

$$F=\int\frac{\frac{d\zeta}{d\xi}\xi+\frac{d\zeta}{d\eta}\eta}{r^3}\gamma\,d\omega\ .$$

Ferner wollen wir in der xy-Ebene statt der rechtwinkligen Coordinaten ξ und η um denselben Anfangspunct die Polarcoordinaten u und φ einführen, dann ist:

$$\xi=u\cos\varphi\ ,\qquad \eta=u\sin\varphi$$

und somit:

$$\frac{d\xi}{du}=\cos\varphi \quad ; \quad \frac{d\eta}{du}=\sin\varphi \ ,$$

und wenn wir mittelst dieser Gleichungen $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ aus den vorigen eliminiren:

$$\xi=\frac{d\xi}{du}u \ ; \quad \eta=\frac{d\eta}{du}u \ .$$

Dadurch nimmt der in F vorkommende Zähler eine einfachere Form an, nämlich:

$$\frac{d\zeta}{d\xi}\xi+\frac{d\zeta}{d\eta}\eta=\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{du}+\frac{d\zeta}{d\eta}\cdot\frac{d\eta}{du}\right)u=\frac{d\zeta}{du}u \ .$$

Endlich können wir in beiden Integralen für das Product $\gamma d\omega$, welches die Projection des Elementes $d\omega$ auf die xy-Ebene darstellt, ein Element dieser Ebene setzen, und dann die Integration über die Projection des betrachteten Flächenstückes auf die Ebene ausführen. Das Element der Ebene, in Polarcoordinaten ausgedrückt, ist $u\,du\,d\varphi$, und die Gleichungen (89) gehen somit über in:

$$(90) \quad \begin{cases} F=\displaystyle\iint\frac{d\zeta}{du}\cdot\frac{u^2}{r^3}\,du\,d\varphi \\ G=\displaystyle\iint\left(\frac{h}{\gamma}-h_p\right)\frac{(\zeta-z)u}{r^3}\,du\,d\varphi \ . \end{cases}$$

Nehmen wir nun zunächst an, dass die Fläche an der betrachteten Stelle nur eine endliche Krümmung habe, und dass auch die Dichtigkeit h sich in der Nähe derselben nur allmälig ändere, dass also ihre Differentialcoefficienten endliche Grössen seien, so können wir, da die xy-Ebene im Puncte P Tangentialebene ist, setzen:

$$(91) \quad \begin{cases} \zeta=mu^2 \\ \dfrac{d\zeta}{du}=m'u \\ \dfrac{h}{\gamma}-h_p=nu \ , \end{cases}$$

worin m, m' und n Functionen von u und φ sind, welche für kleine Werthe von u nicht unendlich gross werden. Durch Einsetzung der beiden letzten Formeln in die Ausdrücke (90) gehen diese über in:

$$(92)\qquad \begin{cases} F=\iint m'\frac{u^3}{r^3}du\,d\varphi \\ G=\iint n\frac{(\zeta-z)u^2}{r^3}du\,d\varphi\ . \end{cases}$$

Bedenkt man hierbei, dass

$$r=\sqrt{u^2+(\zeta-z)^2}$$

ist, so sieht man leicht, dass die zu integrirenden Functionen für keine Werthe von u und z unendlich gross werden können, und dass somit die Integrationen bestimmt ausführbar sind.

Um noch zu zeigen, dass die Ausdrücke beim Durchgange von z durch Null keine sprungweise Aenderung erleiden, wollen wir die Grösse $\frac{1}{r^3}$ in eine Reihe entwickeln. Die Formel von r lautet, wenn man darin für ζ seinen in (91) gegebenen Werth setzt:

$$r=\sqrt{u^2+z^2-2mzu^2+m^2u^4}\ .$$

Hierin wollen wir die Grösse t mit der Bedeutung

$$(93)\qquad t=\sqrt{u^2+z^2}$$

einführen, dann kommt:

$$r=\sqrt{t^2-2mzu^2+m^2u^4}$$
$$=t\sqrt{1-2m\frac{zu^2}{t^2}+m^2\frac{u^4}{t^2}}$$

und daraus folgt weiter:

$$\frac{1}{r^3}=\frac{1}{t^3}\left(1+3m\frac{zu^2}{t^2}-\tfrac{3}{2}m^2\frac{u^4}{t^2}+\text{etc.}\right)\ .$$

Wenn man diese Reihe, welche stark convergirt, weil u nur kleine Werthe haben kann, in die Ausdrücke (92) einsetzt, und im letzteren derselben auch im Zähler für ζ seinen Werth setzt, so kann man schreiben:

$$(94)\qquad \begin{cases} F=\iint m'\frac{u^3}{t^3}du\,d\varphi+\iint 3mm'\frac{zu^5}{t^5}du\,d\varphi-\text{etc.} \\ G=-\iint n\frac{zu^2}{t^3}du\,d\varphi+\iint mn\frac{u^4}{t^3}du\,d\varphi-\text{etc.} \end{cases}$$

Auf diese Weise ist jede der Grössen F und G in eine Reihe von Gliedern zerlegt, von denen das erste unter den Integralzeichen einen Bruch enthält, der im Zähler in Bezug auf z und u von demselben Grade ist, wie im Nenner in Bezug auf t, während die folgenden Glieder Brüche enthalten, die im Zähler von höherem Grade als im Nenner sind. Diese letzteren Glieder lassen sich kurz abmachen. Wenn man von einem derselben den Differentialcoefficienten nach z bilden will, so kann man unter den Integralzeichen differentiiren, wodurch dort ein Bruch entsteht, dessen Zähler noch von gleichem oder höherem Grade als der Nenner ist, und da ein solcher Bruch für keine Werthe von z und u unendlich gross werden kann, so muss auch das Integral für alle Werthe von z endlich bleiben. Da somit der Differentialcoefficient des betrachteten Gliedes endlich bleibt, so kann das Glied selbst beim Durchgange von z durch Null keine sprungweise Aenderung erleiden. Es bleibt also in jedem der beiden obigen Ausdrücke nur das erste Glied besonders zu behandeln, um auch an ihm dieselbe Eigenschaft nachzuweisen. Wir wollen diese Grössen mit F' und G' bezeichnen, indem wir setzen:

$$(95)\qquad \begin{cases} F'=\displaystyle\iint m'\frac{u^3}{(u^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}du\,d\varphi \\ G'=-\displaystyle\iint n\frac{zu^2}{(u^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}du\,d\varphi\ . \end{cases}$$

Statt der ersten dieser beiden Grössen wollen wir noch eine andere bilden. Wir bezeichnen den Werth, welchen F' für $z=0$ annimmt mit A, nämlich:

$$A=\iint m'du\,d\varphi$$

und bilden dann die Differenz:

$$(96)\qquad F'-A=-\iint m'\frac{(u^2+z^2)^{\frac{3}{2}}-u^3}{(u^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}du\,d\varphi\ .$$

Von den beiden Grössen $F'-A$ und G' lässt sich nun leicht beweisen, d a s s s i e , w e n n z u n e n d l i c h k l e i n u n d N u l l w i r d , e b e n f a l l s u n e n d l i c h k l e i n u n d N u l l w e r d e n m ü s s e n. Setzt man nämlich in den unter den Integralzeichen stehenden Brüchen für z einen unendlich kleinen Werth, so ausführen, und wenn man hierbei für ϑ die Grenzen 0 und π nimmt, so erhält man:

$$T=\frac{2\pi}{3l}\left[(2A^2-l^2+Al)\sqrt{A^2+l^2+2Al}-(2A^2-l^2-Al)\sqrt{A^2+l^2-2Al}\right].$$

Bei der weiteren Zusammenziehung dieser Formel ist noch eine besondere Rücksicht zu nehmen. Die unter den Wurzelzeichen stehenden Ausdrücke sind vollständige Quadrate und die Wurzeln lassen sich daher ausziehen. Dabei muss für jede Wurzel von den beiden dem Vorzeichen nach verschiedenen Werthen, welche sie haben kann, immer der positive genommen werden, denn die Wurzel ist nur ein specieller Werth des Abstandes R, und kann als solcher nur positiv sein. Daraus folgt, dass die erste Wurzel $A+l$ ist; bei der zweiten Wurzel aber muss ein Unterschied gemacht werden. Wenn p innerhalb der Kugelfläche liegt, also $l<A$ ist, so muss man setzen $A-l$; liegt dagegen p ausserhalb der Kugelfläche, so dass $l>A$ ist, so muss man setzen $l-A$. Dadurch nimmt die Formel zwei verschiedene Gestalten an, deren eine sich auf den ganzen inneren Raum und die andere sich auf den ganzen äusseren Raum bezieht, und welche wir mit T_i und T_e bezeichnen wollen, nämlich:

$$T_i=4\pi\left(A^2-\frac{l^2}{3}\right)$$

$$T_e=\frac{8\pi}{3}\cdot\frac{A^3}{l}.$$

Den auf die kleinere Kugelfläche bezüglichen Theil des ganzen Integrales können wir aus dem vorigen leicht ableiten. Ausser dass an die Stelle von A jetzt a treten muss, besteht nur noch der Unterschied, dass an der inneren Kugelfläche der Radius nicht in der Richtung von Mittelpuncte fort, sondern nach diesem hin genommen werden muss, um die maassgebende Richtung der Normale zu erhalten, da die letztere immer nach der Aussenseite des Körpers d. h. nach der Seite des leeren Raumes zu nehmen ist. Dadurch ändert der mit i bezeichnete Cosinus und mit ihm dieser ganze Theil des Integrales sein Vorzeichen. Nennen wir diesen Theil des Integrales t, und zwar, jenachdem p innerhalb oder ausserhalb der Kugelfläche liegt, t_i und t_e, so kommt:

$$t_i = 4\pi\left(-a^2 + \frac{l^2}{3}\right)$$

$$t_e = -\frac{8\pi}{3} \cdot \frac{a^3}{l} .$$

Mit Hülfe dieser Werthe können wir die Potentialfunction der Kugelschicht sofort hinschreiben. Dabei sind drei Fälle zu unterscheiden, 1) wenn der Punct p sich in dem inneren leeren Raume, also innerhalb beider Kugelflächen befindet, 2) wenn er sich in der mit dem Agens erfüllten Schicht selbst, also ausserhalb der kleinen und innerhalb der grossen Kugelfläche befindet, 3) wenn er sich in dem äusseren leeren Raum, also ausserhalb beider Kugelflächen befindet. Nach diesen verschiedenen Lagen sind für T und t die mit dem Index i oder e bezeichneten Werthe zu wählen. Wir wollen die Potentialfunction für die drei verschiedenen Räume mit V_i, V_m und V_e bezeichnen, dann kommt:

$$(101) \quad \left\{ \begin{aligned} V_i &= \frac{\varepsilon k}{2}(T_i + t_i) \\ &= 2\pi\varepsilon k\,(A^2 - a^2) \\ V_m &= \frac{\varepsilon k}{2}(T_i + t_e) \\ &= 2\pi\varepsilon k\left(A^2 - \frac{1}{3}l^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{a^3}{l}\right) \\ V_e &= \frac{\varepsilon k}{2}(T_e + t_e) \\ &= \frac{4\pi\varepsilon k}{3} \cdot \frac{A^3 - a^3}{l} . \end{aligned} \right.$$

Diese drei Formeln verhalten sich offenbar sehr verschieden. Die erste ist von l unabhängig, also ist die Potentialfunction innerhalb des eingeschlossenen leeren Raumes constant, und die Kraftcomponenten sind somit Null. Die letzte Formel lässt sich in eine andere sehr einfache Gestalt bringen. Die Grösse:

$$\frac{4\pi}{3}(A^3 - a^3)$$

stellt das Volumen der Kugelschicht, und das Product derselben mit der Dicktigkeit k die in der Schicht enthaltene Menge des Agens dar. Nennen wir diese Menge Q, so kommt:

$$V_e = \varepsilon \frac{Q}{l},$$

d. h., da l der Abstand des Punctes p vom Mittelpuncte ist, die Potentialfunction im äusseren leeren Raume ist dieselbe, als ob die ganze in der Schicht enthaltene Menge des Agens im Mittelpuncte concentrirt wäre.

Diese beiden Sätze für den inneren und äusseren leeren Raum bleiben offenbar auch gültig, wenn nicht die ganze Kugelschicht homogen ist, sondern nur die einzelnen dünneren Schichten, in welche man sie zerlegen kann, und deren Anzahl man endlich oder unendlich nehmen kann, homogen sind, d. h. mit anderen Worten, wenn die Dichtigkeit k irgend eine Function des Radius ist.

Die zweite Formel lässt sich folgendermaassen schreiben:

$$V_m = 2\pi\varepsilon k(A^2 - l^2) + \frac{4\pi\varepsilon k}{3} \cdot \frac{l^3 - a^3}{l}$$

und hieraus sieht man sogleich, dass sie eine Zusammensetzung der ersten und dritten Formel ist, angewandt auf zwei Kugelschichten, eine mit den Radien A und l und die andere mit den Radien l und a.

Wenn man in den vorigen Formeln $a=0$ setzt, so erhält man die Potentialfunction für eine volle Kugel, für welche natürlich nur zwei Formeln gelten, denn die erste, V_i, findet keine Anwendung, weil kein innerer leerer Raum vorhanden ist.

Ein anderer specieller Fall, welcher von besonderem Interesse ist, ist der, wenn man die Schicht als unendlich dünn annimmt, und dabei zugleich die Dichtigkeit k als unendlich gross, so dass die in der Schicht enthaltene Menge des Agens eine endliche Grösse bleibt. Wir wollen für diesen Fall die erste und letzte der Formeln (101) in folgender Weise schreiben:

$$V_i = 2\pi\varepsilon k(A-a)(A+a)$$
$$V_e = \frac{4\pi\varepsilon}{3} k(A-a)\frac{A^2+Aa+a^2}{l} \ .$$

Nehmen wir nun an, dass die Dicke $A-a$ unendlich abnehme, und zugleich die Dichtigkeit k in demselben Verhältnisse unendlich zunehme, so dass das Product $k(A-a)$ eine bestimmte endliche Grösse bleibe, welche h heissen möge, so nähern sich beide Ausdrücke bestimmten Grenzwerthen, welche dieselben sind, die man erhält, wenn man von Vorne herein nur eine einzelne mit dem Agens bedeckte Kugelfläche betrachtet, und unter h die Flächendichtigkeit versteht. Zur Bildung dieser Grenzwerthe hat man in den Summen $A+a$ und A^2+Aa+a^2 zu setzen $A=a$, und die Formeln lauten daher:

$$(102) \quad \begin{cases} V_i = 4\pi\varepsilon h a \\ V_e = 4\pi\varepsilon h \frac{a^2}{l} \ . \end{cases}$$

Will man in den Gleichungen (101) und (102) die Potentialfunction als Function rechtwinkliger Coordinaten haben, so braucht man nur die Grösse l durch solche Coordinaten auszudrücken. Sind x_0, y_0 und z_0 die Coordinaten des Mittelpunctes der Kugelschicht, so hat man zu setzen:

$$l = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} \ .$$

Nach dieser Einsetzung kann man leicht die ersten und zweiten Differentialcoefficienten nach jeder der drei Coordinaten ableiten, und kann die erhaltenen Ausdrücke mit den im Obigen mitgetheilten allgemeinen Sätzen vergleichen.

werden die Brüche für alle endlichen Werthe von u unendlich klein, und nur für unendlich kleine Werthe von u nehmen sie endliche Werthe an, die man leicht näher bestimmen kann. Der erste Bruch:

$$\frac{(u^2+z^2)^{\frac{3}{2}}-u^3}{(u^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

geht, wenn u bis Null abnimmt in den Grenzwerth 1 über. Der zweite Bruch:

$$\frac{zu^2}{(u^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

zeigt ein etwas complicirteres Verhalten. Wenn u soweit abnimmt, dass es ein unendlich Kleines von derselben Ordnung wie z wird, so wird dadurch der Bruch endlich, und wenn u noch weiter abnimmt, so dass es ein unendlich Kleines von höherer Ordnung als z wird, so wird der Bruch wieder unendlich klein. Sei nämlich δ eine unendlich kleine Grösse, und setzen wir:

$$z=a\delta\ ,\qquad u=b\delta\ ,$$

worin a und b endliche Coefficienten sind, so geht dadurch der vorige Bruch über in:

$$\frac{a\delta.b^2\delta^2}{(b^2\delta^2+a^2\delta^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{ab^2}{(b^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\ ;$$

setzen wir dagegen:

$$z=a\delta\ ;\qquad u=b\delta^2\ ,$$

so geht der Bruch über in:

$$\frac{a\delta.b^2\delta^4}{(a^2\delta^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{b^2}{a^2}\delta^2\ .$$

Das Wesentliche aber, worauf es für unsere Betrachtung ankommt, gilt für den einen Bruch so gut, wie für den anderen, nämlich dass das Intervall von u, innerhalb dessen der Bruch einen endlichen Werth hat, nur unendlich klein ist, und dass ferner, wenn man sich denkt, dass der schon unendlich kleine Werth von z noch immer kleiner bis Null werde, dann auch einerseits jenes Intervall von u, innerhalb dessen der Bruch endlich ist, und andererseits die ausserhalb dieses Intervalles

stattfindenden unendlich kleinen Werthe des Bruches immer kleiner bis Null werden. Daraus folgt, dass, wenn man die in $F'-A$ und G' angedeutete Integration nach u von $u=0$ bis zu einem beliebigen endlichen Werthe von u ausführt, man dadurch Grössen erhalten muss, die mit z zugleich unendlich klein und Null werden.

Man kann dieses letztere Resultat auch noch auf eine andere Art beweisen, welche vielleicht noch klarer ist. Betrachten wir zuerst die Grösse $F'-A$, so ist darin der vorher besprochene Bruch mit dem Factor m' behaftet, welcher von u abhängt. Wenn nun die Integration nach u zwischen irgend zwei Grenzen ausgeführt werden soll, so kann man sicher sein, dass das dadurch entstehende Integral seinem Werthe nach zwischen denjenigen beiden Integralen liegt, welche man erhält, wenn man statt der veränderlichen Grösse m' ein Mal den grössten Werth, welchen sie zwischen jenen beiden Grenzen von u hat, und das andere Mal den kleinsten Werth setzt, und dann die Integration ausführt. Wenn man daher findet, dass diese beiden letzten Integrale unendlich klein oder Null werden, so muss man schliessen, dass dasselbe auch mit jenem ursprünglich gegebenen Integrale der Fall ist. Ebenso verhält es sich mit der Grösse G' in Bezug auf den Factor n. Nun lässt sich aber in beiden Grössen, wenn man für m' und n constante Werthe setzt, die Integration nach u sofort wirklich ausführen. Bezeichnen wir die constanten Werthe zum Unterschiede mit m_1' und n_1 und integriren von $u=0$ bis $u=U$, wo U irgend einen endlichen Werth bedeuten soll, so kommt:

$$m_1'\int_0^U \frac{(u^2+z^2)^{\frac{3}{2}}-u^3}{(u^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,du = m_1'\left(U-\frac{U^2+2z^2}{\sqrt{U^2+z^2}}+2\sqrt{z^2}\right)$$

$$n_1\int_0^U \frac{zu^2}{(u^2+z^3)^{\frac{3}{2}}}\,du = n_1\left[-\frac{zU}{\sqrt{U^2+z^2}}+z\log(U+\sqrt{U^2+z^2})-z\log(\sqrt{z^2})\right].$$

werden die Brüche für alle endlichen Werthe von u unendlich klein, und nur für unendlich kleine Werthe von u nehmen sie endliche Werthe an, die man leicht näher bestimmen kann. Der erste Bruch:

$$\frac{(u^2+z^2)^{\frac{3}{2}}-u^3}{(u^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

geht, wenn u bis Null abnimmt in den Grenzwerth 1 über. Der zweite Bruch:

$$\frac{zu^2}{(u^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

zeigt ein etwas complicirteres Verhalten. Wenn u soweit abnimmt, dass es ein unendlich Kleines von derselben Ordnung wie z wird, so wird dadurch der Bruch endlich, und wenn u noch weiter abnimmt, so dass es ein unendlich Kleines von höherer Ordnung als z wird, so wird der Bruch wieder unendlich klein. Sei nämlich δ eine unendlich kleine Grösse, und setzen wir:

$$z=a\delta\ , \qquad u=b\delta\ ,$$

worin a und b endliche Coefficienten sind, so geht dadurch der vorige Bruch über in:

$$\frac{a\delta.b^2\delta^2}{(b^2\delta^2+a^2\delta^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{ab^2}{(b^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\ ;$$

setzen wir dagegen:

$$z=a\delta\ ; \qquad u=b\delta^2\ ,$$

so geht der Bruch über in:

$$\frac{a\delta.b^2\delta^4}{(a^2\delta^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{b^2}{a^2}\delta^2\ .$$

Das Wesentliche aber, worauf es für unsere Betrachtung ankommt, gilt für den einen Bruch so gut, wie für den anderen, nämlich dass das Intervall von u, innerhalb dessen der Bruch einen endlichen Werth hat, nur unendlich klein ist, und dass ferner, wenn man sich denkt, dass der schon unendlich kleine Werth von z noch immer kleiner bis Null werde, dann auch einerseits jenes Intervall von u, innerhalb dessen der Bruch endlich ist, und andererseits die ausserhalb dieses Intervalles

stattfindenden unendlich kleinen Werthe des Bruches immer kleiner bis Null werden. Daraus folgt, dass, wenn man die in $F'-A$ und G' angedeutete Integration nach u von $u=0$ bis zu einem beliebigen endlichen Werthe von u ausführt, man dadurch Grössen erhalten muss, die mit z zugleich unendlich klein und Null werden.

Man kann dieses letztere Resultat auch noch auf eine andere Art beweisen, welche vielleicht noch klarer ist. Betrachten wir zuerst die Grösse $F'-A$, so ist darin der vorher besprochene Bruch mit dem Factor m' behaftet, welcher von u abhängt. Wenn nun die Integration nach u zwischen irgend zwei Grenzen ausgeführt werden soll, so kann man sicher sein, dass das dadurch entstehende Integral seinem Werthe nach zwischen denjenigen beiden Integralen liegt, welche man erhält, wenn man statt der veränderlichen Grösse m' ein Mal den grössten Werth, welchen sie zwischen jenen beiden Grenzen von u hat, und das andere Mal den kleinsten Werth setzt, und dann die Integration ausführt. Wenn man daher findet, dass diese beiden letzten Integrale unendlich klein oder Null werden, so muss man schliessen, dass dasselbe auch mit jenem ursprünglich gegebenen Integrale der Fall ist. Ebenso verhält es sich mit der Grösse G' in Bezug auf den Factor n. Nun lässt sich aber in beiden Grössen, wenn man für m' und n constante Werthe setzt, die Integration nach u sofort wirklich ausführen. Bezeichnen wir die constanten Werthe zum Unterschiede mit m_1' und n_1 und integriren von $u=0$ bis $u=U$, wo U irgend einen endlichen Werth bedeuten soll, so kommt:

$$m_1'\int_0^U \frac{(u^2+z^2)^{\frac{3}{2}}-u^3}{(u^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,du=m_1'\left(U-\frac{U^2+2z^2}{\sqrt{U^2+z^2}}+2\sqrt{z^2}\right)$$

$$n_1\int_0^U \frac{zu^2}{(u^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,du=n_1\left[-\frac{zU}{\sqrt{U^2+z^2}}+z\log(U+\sqrt{U^2+z^2})-z\log(\sqrt{z^2})\right].$$

Fälle, wo nichtumkehrbare virtuelle Bewegungen vorkommen, ausser Acht gelassen sind.

Um den Satz mathematisch auszudrücken, seien δs, δs_1, δs_2 etc. die kleinen Wege, welche die Puncte bei einem Systeme von virtuellen Bewegungen zurücklegen; ferner P, P_1, P_2 etc. die Kräfte, welche auf die einzelnen Puncte wirken, wobei jetzt angenommen sein möge, dass, wenn auf einen Punct mehrere Kräfte wirken, diese schon in eine Resultante zusammengefasst seien; endlich seien φ, φ_1, φ_2 etc. die Winkel zwischen den Kräften und den entsprechenden virtuellen Bewegungen. Dann werden die virtuellen Momente durch die Producte $P\cos\varphi.\delta s$, $P_1\cos\varphi_1.\delta s_1$ etc. dargestellt, und man erhält als Ausdruck des vorigen Satzes:

$$P\cos\varphi.\delta s + P_1\cos\varphi_1.\delta s_1 + P_2\cos\varphi_2.\delta s_2 + \text{etc.} \leqq 0$$

oder kürzer:

$$\Sigma P\cos\varphi.\delta s \leqq 0\ , \tag{103}$$

worin für den Fall, dass nur umkehrbare virtuelle Bewegungen vorkommen, nur das Zeichen $=$ anzuwenden ist, für den Fall aber, dass auch nichtumkehrbare Bewegungen vorkommen, beide Zeichen $=$ und $<$ gelten.

Für die Anwendung ist es bequemer, dem vorigen Ausdrucke eine etwas andere Gestalt zu geben. Bezeichnen wir die Veränderungen, welche die Coordinaten x, y, z des Punctes p durch die kleine Bewegung δs erleiden, mit δx, δy und δz, und zerlegen wir die auf den Punct wirkende Kraft P in ihre drei in die Coordinatenrichtungen fallenden Componenten X, Y und Z, so ist, wie sich leicht nachweisen lässt:

$$P\cos\varphi.\delta s = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z\ ,$$

und entsprechende Gleichungen gelten auch für die anderen Puncte, und man erhält daher statt (103):

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) \leqq 0\ . \tag{104}$$

§. 34.

Die im vorigen Satze mit dem Namen virtuelles Moment bezeichnete Grösse steht in innigem Zusammenhange mit einer anderen Grösse, welche in der Mechanik eine bedeutende Rolle spielt. Wenn ein Punct das Wegstückchen δs zurücklegt, und die in die Richtung des Weges fallende Kraftcomponente $P\cos\varphi$ an allen Puncten des kleinen Weges absolut gleich ist, so stellt das Product $P\cos\varphi.\delta s$ die bei der Bewegung von der Kraft gethane Arbeit dar. Die hierbei gemachte Voraussetzung, dass $P\cos\varphi$ seinen Werth während der Bewegung nicht ändere, ist aber im Allgemeinen nicht streng erfüllt. Wenn die wirksame Kraft an verschiedenen Stellen des Raumes nach Grösse und Richtung verschieden ist, so ist sie auch auf den verschiedenen Theilen des unendlich kleinen Weges nicht als absolut gleich zu betrachten; und wenn ferner δs nicht ein Stück einer geraden Linie, sondern ein Stück einer Curve ist, so liegt auch darin ein Grund, weshalb der Winkel φ zwischen Kraft und Weg für die verschiedenen Theile des Weges etwas verschieden sein muss, selbst wenn die Richtung der Kraft überall dieselbe wäre. Der vollständige Ausdruck der Arbeit lautet daher im Allgemeinen:

$$P\cos\varphi.\delta s+\frac{1}{2}.\frac{d(P\cos\varphi)}{ds}\delta s^2+\frac{1}{3!}.\frac{d^2(P\cos\varphi)}{ds^2}\delta s^3+\text{ etc.}$$

Das erste Glied dieses Ausdruckes ist dasselbe, was im Vorigen das virtuelle Moment der Kraft genannt wurde, und man sieht also, dass die von der Kraft bei der kleinen Bewegung gethane Arbeit sich von dem virtuellen Momente nur durch eine hinzukommende Grösse unterscheidet, welche in Bezug auf die Bewegungsgrösse von höherer als erster Ordnung ist.

Hiernach kann man den Gleichgewichtssatz auch folgendermaassen aussprechen: Für das Gleichgewicht ist es nothwendig und hinreichend, dass für jedes System von virtuellen Bewegungen die Summe der von allen Kräften gethanen Arbeitsgrössen entweder ein unendlich Kleines von höherer als erster Ordnung in Bezug auf die Bewegungsgrössen, oder negativ ist. Wenn alle virtuellen Bewegungen umkehrbar sind, so gilt nur das Erstere, dass die Gesammtarbeit ein unendlich Kleines von höherer Ordnung sein muss.

Man kann bei dieser Art den Gleichgewichtssatz auszusprechen noch eine weitere Angabe hinzufügen. Daraus, dass die unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung positiv oder negativ sein können, entsteht der Unterschied des stabilen und labilen Gleichgewichtes, und zwar in folgender Weise. Ist für alle Systeme von virtuellen Bewegungen die Gesammtarbeit aller Kräfte negativ, so ist das Gleichgewicht stabil; ist sie für alle Systeme positiv, so ist das Gleichgewicht labil; ist sie endlich, was auch vorkommt, für einige Systeme negativ und für andere positiv, so kann man das Gleichgewicht weder vollkommen stabil noch vollkommen labil nennen.

§. 35.

Aus dem Gleichgewichtssatze lässt sich mit Hülfe des d'Alembert'schen Principes der allgemeine Satz der Bewegung ableiten.

Dabei müssen wir aber die beschränkenden Bedingungen, welchen die Bewegungen der Puncte unterworfen sind, zum Theil etwas anders betrachten, als vorher. Es wurde im Vorigen angenommen, dass auch Bewegungshindernisse mit einseitigem Widerstande vorkommen können, von denen vorausgesetzt wurde, dass sie einem beliebigen auf sie ausgeübten Drucke widerstehen, ohne dass dabei die Kraft, mittelst deren sie diesen Widerstand leisten, in Betracht gezogen wurde. Bei der Bewegung aber lässt sich die Sache häufig nicht so einfach abmachen, denn wenn man z. B. annehmen wollte, dass ein Punct mit einer gewissen Geschwindigkeit gegen eine absolut feste Wand flöge, so würde daraus eine plötzliche Vernichtung der Bewegung folgen, wie sie in der Natur nicht vorkommt. Wenn ein

Körper gegen eine feste Wand fliegt, so findet eine gegenseitige Einwirkung zwischen Wand und Körper statt, welche zwar von sehr kurzer aber doch endlicher Dauer ist; während dieser Zeit erleiden die Bewegungen der Theile des Körpers gewisse Aenderungen, und auch die Wand bleibt nicht ganz in Ruhe, sondern geräth ebenfalls etwas in Bewegung und nimmt dadurch einen Theil der lebendigen Kraft des Körpers in sich auf.

Um diese Wirkung vollständig verfolgen zu können, muss man die Wand und die übrigen Gegenstände, mit welchen sie in Verbindung steht, selbst als Körper betrachten, deren Theile der Bewegung fähig und dabei mit gewissen Kräften begabt sind, welche während des Stosses wirksam werden. Durch dieses Verfahren, welches man in allen anderen ähnlichen Fällen ebenfalls anwenden kann, wird das in Betracht kommende bewegliche System vergrössert, aber dafür fallen die Bewegungshindernisse mit einseitigem Widerstande als solche aus der Betrachtung fort. Es giebt freilich Fälle, wo eine Fläche, welche einseitig der Bewegung widersteht, ohne erheblichen Fehler als absolut fest betrachtet werden kann; indessen kann man dieses in den betreffenden Fällen zur Vereinfachung der Rechnung benutzen, ohne dass es nöthig wäre, in der nachfolgenden allgemeinen Betrachtung darauf Rücksicht zu nehmen. Wir wollen daher im Folgenden voraussetzen, dass keine Bewegungshindernisse mit einseitigem Widerstande vorkommen, und dass somit alle virtuellen Bewegungen umkehrbar seien.

Wir wenden uns nun wieder zu dem früher betrachteten Systeme von beweglichen Puncten, worunter wir jetzt materielle Puncte mit den Massen m, m_1, m_2 etc. verstehen, und deren Coordinaten, welche der Reihe nach x, y, z; x_1, y_1, z_1 etc. heissen mögen, wir als Functionen der Zeit t betrachten. Wir bilden nun für den ersten Punct, auf welchen eine Kraft wirkt, deren Componenten X, Y und Z sind, folgende Grössen:

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2}\ ;\quad Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\ ;\quad Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\ ,$$

ebenso für den zweiten Punct die Grössen:

$$X_1 - m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2}\ ;\quad Y_1 - m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2}\ ;\quad Z_1 - m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2}$$

u. s. w. Diese Grössen, welche man die Componenten der verlorenen Kräfte nennt, müssen in dem Ausdrucke (104) an die Stelle der Componenten der gegebenen wirksamen Kräfte gesetzt werden. Dadurch erhält man, da von den beiden Zeichen $=$ und $<$ nur das erstere anzuwenden ist, weil alle virtuellen Bewegungen als umkehrbar angenommen werden, folgende Gleichung:

$$(105)\quad \sum\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0.$$

Hierin bezieht sich das Summenzeichen auf alle Massen, welche an der Bewegung theilnehmen, auch wenn darunter solche vorkommen, auf die keine der gegebenen Kräfte direct einwirkt, während in dem für das Gleichgewicht geltenden Ausdrucke (104), wenn mehrere Puncte untereinander in Verbindung sind, von denen einige unter der Einwirkung von Kräften stehen und andere nicht, nur die ersteren unter dem Summenzeichen enthalten sind.

Dieses ist die allgemeine Bewegungsgleichung, welche bekanntlich in der Mechanik von grosser Wichtigkeit ist. Sie bleibt auch gültig, wenn die beweglichen Massen nicht in Puncten concentrirt sind, sondern Räume stetig ausfüllen, in welchem Falle die Summation durch eine Integration zu ersetzen ist, was nach gewissen Umformungen des Ausdruckes geschehen kann.

§. 36.

Wir wollen nun die Gleichung (105) dazu anwenden, den Satz von der Aequivalenz von lebendiger Kraft und mechanischer Arbeit abzuleiten.

Dazu müssen wir zunächst wieder über die beschränkenden Bedingungen, welchen die Bewegungen der Puncte unterworfen sind, sprechen. Bei den Betrachtungen über das Gleichgewicht konnte es als von selbst verständlich angesehen werden, dass diese Bedingungen der Art seien, dass durch sie allein keine Bewegung der Puncte veranlasst werden könne. Wenn also z. B. von einem der Puncte angenommen wurde, dass er gezwungen sei, in einer gegebenen Fläche zu bleiben, so wurde diese Fläche als fest und unveränderlich vorausgesetzt, denn wenn die Fläche sich bewegte oder mit der Zeit ihre Gestalt änderte, so würde dadurch allein schon eine Bewegung des Punctes bedingt sein, so dass die zum Gleichgewichte gehörige Ruhe nicht möglich wäre. Bei den Betrachtungen über die Bewegung dagegen brauchen solche Fälle nicht ausgeschlossen zu werden, denn man kann sehr wohl die Bewegung eines Punctes betrachten, welcher sich in einer bewegten Fläche befindet und deren Bewegung mitmacht, und ausserdem in der Fläche durch die auf ihn wirkende Kraft noch besonders bewegt wird.

Mathematisch ist die Bedingung, dass ein Punct, dessen Coordinaten x, y, z heissen, in einer festen Fläche bleiben muss, darzustellen durch eine Gleichung von der Form:

$$F(x, y, z) = 0 ;$$

dagegen die Bedingung, dass der Punct in einer Fläche bleiben muss, die selbst beweglich oder mit der Zeit veränderlich ist, durch eine Gleichung von der Form:

$$F(x, y, z, t) = 0 .$$

In ähnlicher Weise kann man den Unterschied zwischen den beiden Fällen, ob in den gegebenen Bedingungen schon der Grund zu Bewegungen liegt oder nicht, allgemein dahin aussprechen, dass die Gleichungen, welche die Bedingungen darstellen, im ersteren Falle ausser den Coordinaten der gegebenen Puncte noch die Zeit oder andere von der Zeit abhängige Grössen, im letzteren Falle dagegen nur die Coordinaten der Puncte als Veränderliche enthalten.

Diese beiden Fälle unterscheiden sich wesentlich durch die Art, wie die wirklich stattfindende Bewegung mit den virtuellen Bewegungen zusammenhängt. Wenn man aus Bedingungsgleichungen, welche die Zeit enthalten, die virtuellen Bewegungen bestimmen will, so muss man dieses für einen bestimmten Zeitmoment thun, und die Zeit ist daher bei dieser Rechnung als eine constante Grösse zu behandeln. Sei z. B. eine solche Gleichung, welche die Coordinaten einer Anzahl von Puncten und ausserdem die Zeit enthält, in folgender Form gegeben:

$$(106) \qquad F(x, y, z, x_1 \ldots\ldots t) = 0 \ ,$$

so erhält man daraus für die virtuellen Bewegungen zur Zeit t folgende Gleichung:

$$(107) \quad \frac{dF}{dx}\delta x + \frac{dF}{dy}\delta y + \frac{dF}{dz}\delta z + \frac{dF}{dx_1}\delta x_1 + \ldots\ldots = 0 \ ,$$

worin nur Differentialcoefficienten nach den Coordinaten der Puncte vorkommen. Betrachtet man dagegen die Bewegungen, welche die Puncte während der unendlich kleinen Zeit von t bis $t+dt$ wirklich ausführen, und deren Projectionen auf die Coordinatenaxen dx, dy, dz, dx_1 etc. heissen mögen, so muss man für diese eine Gleichung bilden, in welcher die Veränderung der Zeit mit berücksichtigt ist, nämlich:

$$(108) \quad \frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz + \frac{dF}{dx_1}dx_1 + \ldots\ldots + \frac{dF}{dt}dt = 0 \ .$$

Hieraus sieht man, dass in einem solchen Falle wo die gegebenen Bedingungsgleichungen die Zeit enthalten, die für dx, dy, dz, dx_1 etc. geltenden Gleichungen verschieden sind von den für δx, δy, δz, δx_1 etc. geltenden, und dass daher das System von Bewegungen, welche die Puncte während der kleinen Zeit von t bis $t+dt$ wirklich ausführen, im Allgemeinen mit keinem der Systeme von virtuellen Bewegungen, welche für die Zeit t gelten, identisch sein kann. Enthalten dagegen die gegebenen Bedingungsgleichungen die Zeit nicht, so fällt in den für dx, dy, dz, dx_1 etc. geltenden Gleichungen das letzte Glied, welches den Differentialcoefficienten nach t als Factor hat, fort, und dann stimmen diese Gleichungen mit den für δx, δy, δz, δx_1 etc. geltenden überein, und für diesen Fall muss daher das System der wirklich stattfindenden Bewegungen eins der vielen Systeme von virtuellen Bewegungen sein.

Auf den zuletzt genannten Fall bezieht sich nun unser Satz von der Aequivalenz von lebendiger Kraft und mechanischer Arbeit, und ich will die Voraussetzung, von welcher wir bei seiner Entwickelung ausgehen müssen, und auf welcher daher auch seine Gültigkeit beruht, hier noch einmal aussprechen. Die Bedingungsgleichungen, welchen die Bewegungen der Puncte unterworfen sind, dürfen als Veränderliche nur die Coordinaten der Puncte enthalten; oder wie man es dem Vorigen nach auch ausdrücken kann: in den gegebenen Bedingungen darf nicht selbst schon der Grund zu Bewegungen liegen, d. h. es dürfen in ihnen nicht implicite Kräfte enthalten sein, welche ebenso wie die explicite gegebenen Kräfte Bewegungen hervorrufen und die vorhandenen Bewegungen beschleunigen oder verzögern können.

Unter dieser Voraussetzung muss die obige Gleichung (105), welche für jedes System von virtuellen Bewegungen gilt, auch gültig bleiben, wenn man statt der virtuellen Bewegungen die während der Zeit dt wirklich ausgeführten Bewegungen setzt, welche ja mit einem der Systeme von virtuellen Bewegungen zusammenfallen müssen. Um bestimmt anzudeuten, dass sich die Bewegungen auf die Zeit dt beziehen, wollen wir statt dx, dy, dz vollständiger schreiben:

$$\frac{dx}{dt}dt\,,\quad \frac{dy}{dt}dt\,,\quad \frac{dz}{dt}dt\,.$$

Durch Substitution dieser Grössen an die Stelle von δx, δy, δz geht (105) über in:

$$\sum\left[\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{dx}{dt}+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{dy}{dt}+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\frac{dz}{dt}\right]dt=0\,,$$

wofür wir bei etwas anderer Zusammenfassung der Glieder schreiben können:

$$(109)\quad \sum m\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\cdot\frac{d^2z}{dt^2}\right)dt=\sum\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)dt.$$

Hierin können wir die linke Seite einfacher ausdrücken. Bezeichnen wir die Geschwindigkeit des ersten Punctes zur Zeit t mit v, so ist:

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

und daraus folgt:

$$\frac{d(v^2)}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d^2z}{dt^2}\right),$$

und die entsprechenden Gleichungen müssen auch für die Geschwindigkeiten aller übrigen Puncte gelten. Durch Anwendung dieser Gleichungen geht (109) über in:

$$\text{(110)} \quad \frac{1}{2}\sum m \frac{d(v^2)}{dt} dt = \sum\left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right)dt .$$

Der hier auf der linken Seite stehende Ausdruck lässt sich sofort integriren, und wir wollen dieses von irgend einer Anfangszeit t_0 bis zur Zeit t ausführen, wobei wir die zur Anfangszeit stattfindenden Geschwindigkeiten der Puncte mit v_0, $(v_1)_0$, $(v_2)_0$ etc. bezeichnen. Auf der rechten Seite können wir die Integration vorläufig nur andeuten. Es kommt also:

$$\text{(111)} \quad \frac{1}{2}\sum mv^2 - \frac{1}{2}\sum mv_0^2 = \int_{t_0}^{t} \sum\left(X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt}\right)dt.$$

Diese Gleichung enthält den gesuchten Satz, und es kommt nur noch darauf an die Bedeutung der auf beiden Seiten befindlichen Ausdrücke näher anzugeben. Wenn eine Masse m sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, so nennen wir $\frac{1}{2}mv^2$ die lebendige Kraft der Masse[1]; demnach ist $\frac{1}{2}\Sigma mv^2$ die lebendige Kraft des ganzen Systemes von Massen, und die linke Seite der Gleichung bedeutet die Zunahme der lebendigen Kraft, welche während der Zeit von t_0 bis t in dem Systeme stattgefunden hat. Was ferner die rechte Seite anbetrifft, so ergiebt sich aus dem, was in §. 34 gesagt ist, dass der Ausdruck:

---

1) Etwas abweichend von der früher üblichen Bezeichnungsweise, nach welcher mv^2 die lebendige Kraft genannt wurde.

$$\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)dt\ ,$$

wenn man von unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung absieht, die Arbeit bedeutet, welche die auf den Punct wirkende Kraft während der Zeit dt thut; und dementsprechend stellt die rechte Seite der vorigen Gleichung die von allen in dem Systeme wirksamen Kräften während der Zeit von t_0 bis t gethane Arbeit dar. Folglich lässt sich die Bedeutung der Gleichung so aussprechen: die während irgend einer Zeit in dem Systeme entstehende Vermehrung der lebendigen Kraft ist gleich der während derselben Zeit von den wirksamen Kräften gethanen Arbeit.

§. 37.

Wir sind sowohl beim Gleichgewichte als auch bei der Bewegung zu Gleichungen gelangt, welche die mechanische Arbeit enthalten, und müssen nun den Ausdruck, welcher die letztere darstellt, etwas näher betrachten.

Bezeichnen wir die von t_0 bis t in dem Systeme gethane Arbeit mit T, so ist:

$$T=\int_{t_0}^{t}\sum\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)dt\ . \tag{112}$$

Hierin sind die Kraftcomponenten X, Y und Z erstens von den Coordinaten der beweglichen Puncte abhängig, denn die auf einen Punct wirkende Kraft kann an verschiedenen Stellen des Raumes verschieden sein; ferner können sie direct von der Zeit abhängen, indem die wirksamen Kräfte mit der Zeit veränderlich sein können; ausserdem können sie von dem augenblicklichen Bewegungszustande des Systemes abhängen, wie es z. B. bei der vom Luftwiderstande herrührenden Kraft der Fall ist, welche von der Geschwindigkeit des bewegten Körpers abhängt. Da nun aber die Coordinaten der Puncte und alle mit der Bewegung zusammenhängenden Grössen, welche in den Kraftcomponenten vorkommen können, als Functionen der Zeit anzusehen sind, so kann man auch die Kraftcomponenten selbst als Functionen dieser einen Veränderlichen betrachten, und daraus folgt weiter, dass der ganze zu integrirende Ausdruck sich ebenfalls als Function der Zeit allein darstellen lassen muss. Demnach ist die in unserer Gleichung vorgeschriebene Integration immer möglich, sobald die Bewegung hinlänglich bekannt ist, um die Zurückführung des Ausdruckes auf eine Function der Zeit wirklich bewerkstelligen zu können, indem es sich dann nur noch darum handelt eine Function von Einer Veränderlichen nach dieser Veränderlichen zu integriren.

Es giebt aber auch Fälle, wo diese Zurückführung nicht nothwendig ist, sondern wo man das Integral in der Form:

$$\int\Sigma(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)$$

schreiben, und die Coordinaten als von einander unabhängige Veränderliche betrachten kann, und die Integration doch ausführbar bleibt; und diese Fälle sind für die Physik von besonderer Wichtigkeit.

§. 38.

Dahin gehört zunächst der schon früher in §. 5 behandelte Fall, wo die Kräfte, welche auf einen beweglichen Punct wirken, sich zerlegen lassen in anziehende und abstossende Kräfte, welche von festen Puncten des Raumes ausgehen und ihrer Stärke nach irgend welche Functionen der Entfernung sind.

Es seien p', p'_1, p'_2 etc. solche feste Puncte mit den Coordinaten x', y', z'; x'_1, y'_1, z'_1 etc. und von den beweglichen Puncten sei vorläufig nur Einer p mit den Coordinaten x, y, z zur Betrachtung ausgewählt. Die Entfernung zwischen p und p' heisse r', so dass man hat:

$$r'=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}\,, \tag{113}$$

und die Kraft, mit welcher p' auf p wirkt, werde durch $f(r')$

dargestellt, und sei anziehend oder abstossend, jenachdem diese Function positiv oder negativ ist. Ebenso sei der Abstand zwischen p und p'_1 mit r'_1 und die von p'_1 ausgehende Kraft mit $f_1(r'_1)$ bezeichnet u. s. f. Wenn man dann folgende neue Functionen bildet

$$F(r') = -\int f(r')dr'$$

$$F_1(r'_1) = -\int f_1(r'_1)dr'_1 ,$$

etc.

und darauf setzt:

$$U = F(r') + F_1(r'_1) + \text{etc.} = \Sigma F(r') , \tag{114}$$

so ist U die Kraftfunction für den Punct p, und man hat:

$$X = \frac{dU}{dx} , \quad Y = \frac{dU}{dy} , \quad Z = \frac{dU}{dz} .$$

In Folge dieser Gleichung kann man schreiben:

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz}dz ,$$

und da U eine Grösse ist, welche nur die Coordinaten x, y, z als Veränderliche enthält, so ist der hier rechts stehende Ausdruck ihr vollständiges Differential, welches kurz mit dU bezeichnet werden kann, und somit ist die geforderte Integration ohne Weiteres ausführbar, indem man erhält:

$$\int (Xdx + Ydy + Zdz) = \int dU = U + \text{Const.} \tag{115}$$

Hat die Bewegung des Punctes p von einem gegebenen Anfangspuncte aus stattgefunden, dessen Coordinaten x_0, y_0, z_0 heissen mögen, und nennen wir den Werth, welchen die Function U an dieser Stelle hat, U_0, so gilt für die Arbeit, welche bei der Bewegung von dort aus bis zu dem Puncte x, y, z von den wirksamen Kräften gethan ist, die Gleichung:

$$T = U - U_0 . \tag{116}$$

Daraus folgt, dass bei dieser Art von Kräften, wenn der Anfangs- und Endpunct der Bewegung gegeben sind, die Arbeit vollständig bestimmt ist, ohne dass man den Weg, auf welchem der Punct von der einen Stelle zur anderen gelangt ist, zu kennen braucht. Ja man kann noch mehr sagen: es brauchen nur die beiden Niveauflächen, in welchen der Anfangs- und Endpunct liegen, und welche bekanntlich bestimmten Werthen der Function U entsprechen, gegeben zu sein, um die Arbeit vollständig bestimmen zu können.

Die vorstehenden Betrachtungen können wir nun leicht auf den Fall ausdehnen, wo nicht blos Ein beweglicher Punct p, sondern ein ganzes System beweglicher Puncte p, p_1, p_2 etc. gegeben ist, während die Kräfte, welche auf sie wirken, wie vorher von den festen Puncten p', p'_1, p'_2 etc. ausgehen. In diesem Falle gilt für jeden der beweglichen Puncte eine Kraftfunction der vorher besprochenen Art, und wenn man diese der Reihe nach mit U, U_1, U_2 etc. bezeichnet so kann man schreiben:

$$\begin{aligned}\Sigma(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz) &= dU+dU_1+dU_2+\text{ etc.}\\ &= d(U+U_1+U_2+\text{ etc.}).\end{aligned}$$

Die hier auf der rechten Seite in Klammer stehende Summe kann man auch in folgender Weise bezeichnen:

$$(117)\qquad U+U_1+U_2+\text{ etc.} = \Sigma F(r')$$

worin aber das Summenzeichen eine weitere Bedeutung hat, als in der Gleichung (114), indem es nicht blos soviele Glieder umfasst, als feste Puncte vorhanden sind, sondern soviele, als es Combinationen von je einem beweglichen mit einem festen Puncte giebt. Die obige Gleichung lautet demnach:

$$(118)\qquad \Sigma(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz) = d\Sigma F(r')\ .$$

Der zu integrirende Ausdruck ist also auf die Form eines vollständigen Differentials zurückgeführt, und damit ist die Ausführbarkeit der Integration bewiesen.

§. 39.

Ein anderer Fall, welchen wir zu betrachten haben, ist der, wo die beweglichen Puncte unter einander selbst anziehende oder abstossende Kräfte ausüben, welche ihrer Stärke nach irgend welche Functionen der Entfernung sind.

Der Abstand der beiden Puncte p und p_1, deren Coordinaten x, y, z und x_1, y_1, z_1 sind, heisse r, so dass man hat:

$$r = \sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2}\ . \tag{119}$$

und die Kraft, welche sie auf einander ausüben, sei durch $\varphi(r)$ bezeichnet. Diese Kraft wirkt auf beide Puncte mit gleicher Stärke und in entgegengesetzter Richtung, und sie kommt daher in der Formel für die Gesammtarbeit zweimal vor, erstens am Puncte p, wo ihre Componenten sind:

$$\varphi(r)\frac{x_1-x}{r}\ ;\quad \varphi(r)\frac{y_1-y}{r}\ ;\quad \varphi(r)\frac{z_1-z}{r}\ ,$$

und zweitens am Puncte p_1, wo ihre Componenten sind:

$$\varphi(r)\frac{x-x_1}{r}\ ;\quad \varphi(r)\frac{y-y_1}{r}\ ;\quad \varphi(r)\frac{z-z_1}{r}\ .$$

Nun hat man in Folge von (119):

$$\frac{dr}{dx} = -\frac{x_1-x}{r} \text{ und } \frac{dr}{dx_1} = -\frac{x-x_1}{r}$$

und man kann daher, wenn man noch die Function $\Phi(r)$ mit der Bedeutung:

$$\Phi(r) = -\int\varphi(r)dr$$

einführt, schreiben:

$$\varphi(r)\frac{x_1-x}{r} = -\varphi(r)\frac{dr}{dx} = \frac{d\Phi(r)}{dx}$$
$$\varphi(r)\frac{x-x_1}{r} = -\varphi(r)\frac{dr}{dx_1} = \frac{d\Phi(r)}{dx_1}\ .$$

Entsprechende Gleichungen gelten auch für die Componenten nach der y- und z-Richtung, und die sechs Componenten der beiden entgegengesetzten Kräfte werden daher durch folgende Differentialcoefficienten dargestellt:

$$\frac{d\Phi(r)}{dx}\ ;\quad \frac{d\Phi(r)}{dy}\ ;\quad \frac{d\Phi(r)}{dz}\ ;$$
$$\frac{d\Phi(r)}{dx_1}\ ;\quad \frac{d\Phi(r)}{dy_1}\ ;\quad \frac{d\Phi(r)}{dz_1}\ .$$

Nimmt man nun aus der ganzen Summe

$$\Sigma(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)$$

den Theil heraus, welcher sich auf diese beiden entgegengesetzten Kräfte bezieht, so lautet derselbe:

$$\frac{d\Phi(r)}{dx}dx+\frac{d\Phi(r)}{dy}dy+\frac{d\Phi(r)}{dz}dz+\frac{d\Phi(r)}{dx_1}dx_1+\frac{d\Phi(r)}{dy_1}dy_1+\frac{d\Phi(r)}{dz_1}dz_1\,,$$

und dieses ist, da r nur von den sechs Grössen x, y, z, x_1, y_1, z_1 abhängt, und daher auch $\Phi(r)$ als eine Function dieser sechs Grössen zu betrachten ist, ein vollständiges Differential, wofür man einfach $d\Phi(r)$ schreiben kann.

Ebenso giebt jede zwischen zwei beweglichen Puncten wirkende Kraft sechs Glieder, welche zusammen ein vollständiges Differential bilden. Man kann daher, wenn nur solche Kräfte vorkommen, welche die beweglichen Puncte unter einander ausüben, schreiben:

$$(120)\quad \begin{aligned}\Sigma(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz) &= d\Phi(r)+d\Phi_1(r_1)+\text{ etc.}\\ &= d[\Phi(r)+\Phi_1(r_1)+\text{ etc.}]\\ &= d\Sigma\Phi(r)\ ,\end{aligned}$$

worin die an der rechten Seite angedeutete Summe soviele Glieder enthält, als sich aus den beweglichen Puncten Combinationen zu je zweien bilden lassen. Es ist somit auch für diesen Fall die Integrirbarkeit des fraglichen Ausdruckes nachgewiesen.

§. 40.

Nimmt man nun endlich den Fall an, dass die beiden betrachteten Arten von Kräften gleichzeitig wirken, dass also die beweglichen Puncte Anziehungs- und Abstossungskräfte sowohl von festen Centren aus erleiden, als auch unter einander selbst ausüben, so braucht man nur die beiden vorher gewonnenen Resultate zu vereinigen. Man erhält dann:

$$(121)\quad \begin{aligned}\Sigma(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz) &= d\Sigma F(r')+d\Sigma\Phi(r)\\ &= d[\Sigma F(r')+\Sigma\Phi(r)]\end{aligned}$$

worin sich auf der rechten Seite die erste Summe auf alle Combinationen je eines beweglichen Punctes mit einem festen Puncte, und die zweite Summe auf alle Combinationen der beweglichen Puncte unter einander zu je zweien bezieht.

Nach dieser Gleichung können wir die Arbeit, welche während irgend einer Bewegung des beweglichen Systemes von allen in ihm wirksamen Kräften gethan wird, sofort hinschreiben. Bezeichnen wir für die anfängliche Lage der Puncte die Entfernungen resp. mit r'_0, $(r'_1)_0$, $(r'_2)_0$ etc. und mit r_0, $(r_1)_0$, $(r_2)_0$ etc., so kommt:

$$T = \Sigma F(r') + \Sigma \Phi(r) - \Sigma F(r'_0) - \Sigma \Phi(r_0) \,. \tag{122}$$

Man braucht also auch in diesem complicirteren Falle zur Bestimmung der Arbeit nur die anfängliche und die schliessliche Lage der Puncte zu kennen, ohne über die Art, wie sie aus der einen Lage in die andere gekommen sind, etwas zu wissen.

§. 11.

Wir wollen nun die vorher gemachten Annahmen in derselben Weise weiter specialisiren, wie wir es in §. 6 und 7 gethan haben, um von der allgemeinen Kraftfunction zur Potentialfunction zu gelangen. Es soll nämlich angenommen werden, dass sich in den Puncten, welche auf einander wirken, gewisse Mengen von Agentien befinden, welche die Wirkung ausüben und erleiden, und dass ferner die Kräfte dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional seien.

Die in den beweglichen Puncten p, p_1, p_2 etc. befindlichen Mengen seien q, q_1, q_2 etc.[1]), und die in den festen Puncten p', p'_1, p'_2 etc. befindlichen Mengen q', q'_1, q'_2 etc. Die Kraft, welche die Mengen q und q', welche um die Strecke r' von einander entfernt sind, auf einander ausüben, wird durch

$$e\frac{qq'}{r'^2}$$

dargestellt, worin e ein Factor ist, welcher von der Natur der

1) Für die in den Puncten befindlichen Mengen der wirksamen Agentien sind andere Zeichen gewählt, als für die in denselben Puncten befindlichen materiellen Massen, welche mit m, m_1, m_2 etc. bezeichnet wurden, weil nämlich die Agentien, welche die Kräfte ausüben, von den Massen, welche dadurch in Bewegung gesetzt werden, verschieden sein können.

Agentien und von den gewählten Einheiten abhängt. Nehmen wir an, dass alle auf einander wirkenden Agentien von derselben Natur seien, und dass zwischen ihnen nur solche Unterschiede vorkommen, die sich dadurch ausdrücken lassen, dass man die Mengen theils positiv theils negativ in Rechnung bringt, so ist jener Factor für alle vorkommenden Combinationen von zwei Mengen gleich, und wir haben ihn oben für diesen Fall zum Unterschiede mit ε bezeichnet.

Wir erhalten demnach für die Function, welche die Kraft zwischen zwei Mengen ausdrückt, die Form:

$$f(r') = \varepsilon \frac{qq'}{r'^2}$$

und daraus folgt:

$$F(r') = -\int f(r')dr' = \varepsilon \frac{qq'}{r'} \ .$$

Bilden wir nun die in den Gleichungen (117) und (118) vorkommende Summe $\Sigma F(r')$, für welche wir in diesem Falle ein besonderes Zeichen W' einführen wollen, so erhalten wir:

$$(123) \qquad W' = \varepsilon \sum \frac{qq'}{r'} \ ,$$

worin das Summenzeichen alle Combinationen je einer der Mengen q mit einer der Mengen q' umfasst, und r' der zu jeder Combination gehörige Abstand ist.

Diese Grösse W' ist das Potential des Systemes der q' auf das System der q. Da in ihr die Mengen q und q' in ganz gleicher Weise vorkommen, so kann man sie auch das Potential des Systemes der q auf das System der q', oder auch das Potential der beiden Systeme auf einander nennen.

Man kann die vorige Summe in der Weise zerlegen, dass man immer die Glieder, welche eine und dieselbe Menge des Systemes der q enthalten, zusammenfasst und daraus Partialsummen bildet, welche man dann noch addiren muss um die Gesammtsumme zu erhalten. Diese Partialsummen lauten, wenn man jedesmal die allen Gliedern gemeinsame Menge vor das Summenzeichen setzt:

$$\varepsilon q \sum \frac{q'}{r'} \;;\quad \varepsilon q_1 \sum \frac{q'}{r'_1} \;;\quad \varepsilon q_2 \sum \frac{q'}{r'_2} \text{ etc.}$$

worin die verschiedene Bezeichnung der Abstände r', r'_1, r'_2 etc. andeuten soll, dass in jeder Summe die Abstände von dem Puncte aus gerechnet werden müssen, wo sich die vor dem Summenzeichen stehende Menge befindet. Nun sind aber die Grössen:

$$\varepsilon \sum \frac{q'}{r'} \;;\quad \varepsilon \sum \frac{q'}{r'_1} \;;\quad \varepsilon \sum \frac{q'}{r'_2} \text{ etc.},$$

die Werthe der Potentialfunction des Systemes der q' an den Puncten, wo sich die Mengen q, q_1, q_2 etc. befinden, und wir wollen diese Werthe dem Früheren entsprechend mit V', V'_1, V'_2 etc. bezeichnen, dann lauten jene Partialsummen:

$$qV' \;;\quad q_1 V'_1 \;;\quad q_2 V'_2 \text{ etc.}$$

und dadurch geht der Ausdruck für das Potential über in:

$$W' = \Sigma q V' \;. \tag{124}$$

Man kann statt dieses Ausdruckes auch den ihm analogen schreiben, welcher entsteht, wenn man die beiden Systeme unter einander vertauscht. Sei nämlich V die Potentialfunction des Systemes der q an der Stelle, wo sich eine der Mengen q' befindet, so ist:

$$W' = \Sigma q' V \;. \tag{124a}$$

Wenn die Agentien, welche auf einander wirken, nicht in einzelnen Puncten concentrirt sind, sondern Räume stetig ausfüllen, so muss man sie in Elemente zerlegen, und statt der Summenzeichen Integralzeichen einführen. Dadurch erhält man an Stelle der Gleichung (123):

$$W' = \varepsilon \iint \frac{dq\, dq'}{r'} \tag{125}$$

worin sich die eine Integration über das ganze Agens q und die andere über das ganze Agens q' erstreckt. Durch Einführung der Potentialfunction des einen oder des anderen Agens erhält man:

(126) $$W' = \int V' dq = \int V dq' \ .$$

§. 12.

Wir betrachten nun in derselben Weise die Kräfte, welche die Bestandtheile des beweglichen Systemes auf einander ausüben. Gehen wir zuerst wieder von dem Falle aus, dass einzelne Mengen q, q_1, q_2 etc. des Agens in Puncten concentrirt sind, so ist ohne Weiteres klar, dass die in (120) vorkommende Summe $\Sigma\Phi(r)$, welche wir für unseren jetzigen Fall mit W bezeichnen wollen, folgende Form annimmt:

(127) $$W = \varepsilon \sum \frac{qq_1}{r} \ ,$$

worin das Summenzeichen sich auf alle Combinationen der Mengen q zu je zweien bezieht, und r die betreffenden Abstände bedeutet. Diese Grösse ist das Potential des Systemes der q auf sich selbst.

Für den Fall, dass das Agens einen Raum stetig ausfüllt, muss man setzen:

(128) $$W = \frac{1}{2} \varepsilon \int\int \frac{dq\, dq_1}{r} \ ,$$

worin die Integration zweimal über dasselbe Agens auszuführen ist. Bedeutet V die Potentialfunction des betrachteten Agens an der Stelle, wo sich eins seiner eigenen Elemente dq befindet, so geht der vorige Ausdruck über in:

(129) $$W = \frac{1}{2} \int V dq \ .$$

Der Factor $\frac{1}{2}$, welcher in diesen Ausdrücken enthalten ist, obwohl er sich in den entsprechenden Ausdrücken (125) und (126) nicht findet, musste in diesem Falle desshalb hinzugefügt werden, weil in den Integralen jedes Product aus zwei Elementen dq_m und dq_n doppelt vorkommt, ein Mal in der Anordnung $dq_m dq_n$ und das andere Mal in der Anordnung $dq_n dq_m$, während es in dem Potentiale nur einmal vorkommen darf.

Ausser diesem Umstande ist bei den Formeln für W noch ein anderer Umstand zur Sprache zu bringen. Unter den unendlich vielen Combinationen von je zwei Elementen, welche jene Integrale in sich begreifen, kommen auch solche vor, welche nicht zwei verschiedene Elemente, sondern zweimal dasselbe Element enthalten, und man kann daher fragen, 1) ob das Vorhandensein dieser Combinationen, bei denen der im Nenner stehende Abstand Null wird, überhaupt noch eine bestimmte Ausführung der Integration zulässt, und 2) ob diese Combinationen mit in das Potential gehören oder nicht.

Beide Fragen lassen sich am leichtesten beantworten, wenn wir die in (129) gegebene zweite Formel von W betrachten, weil wir die darin vorkommende Function V schon oben vollständig behandelt haben, und daher die Transformationen, welche bei der in (128) gegebenen ersten Formel nöthig wären, nicht mehr auszuführen brauchen. Dabei versteht es sich dann von selbst, dass, was für die zweite Formel gilt, auch für die erste gelten muss, da jene in vereinfachter Form ganz dasselbe ausdrückt wie diese.

Wir wissen aus dem Früheren, dass die Potentialfunction auch im Innern des von dem Agens stetig erfüllten Raumes überall einen endlichen Werth behält, und demnach muss auch das Integral $\int V dq$ einen vollständig bestimmten endlichen Werth haben, wodurch die erste Frage entschieden ist. Was ferner die zweite Frage anbetrifft, so haben wir in Gleichung (32) die Potentialfunction in folgender Form dargestellt:

$$V = \varepsilon k \iint r\, dr\, d\sigma \;,$$

worin $d\sigma$ das Element des körperlichen Winkels ist. In dieser Form ist der Abstand r nicht nur aus dem Nenner verschwunden, sondern er kommt sogar im Zähler vor. Daraus folgt, dass, wenn man sich um den Punct, auf welchen sich die Potentialfunction bezieht, und welcher in dieser Formel zugleich der Mittelpunct der Polarcoordinaten ist, einen unendlich kleinen

Raum abgegrenzt denkt, es auf den Werth von V nur einen unendlich kleinen Einfluss haben kann, ob man bei seiner Berechnung die in diesem kleinen Raume enthaltene Menge des Agens berücksichtigt oder nicht. Demnach können wir auch bei dem Integral $\int V dq$ sagen, es macht nur einen unendlich kleinen Unterschied, ob bei der Bestimmung von V die kleine Menge dq mitgerechnet oder fortgelassen ist, und wenn man annimmt, dass das letztere geschehen sei, d. h. dass in den verschiedenen Gliedern Vdq, $V_1 dq_1 \ldots\ldots V_n dq_n$, welche in dem Integrale vorkommen, die Werthe von V, $V_1 \ldots\ldots V_n$ immer so bestimmt seien, dass dasjenige Element, mit welchem die Potentialfunction multiplicirt ist, in ihr selbst nicht vorkommt, so fallen dadurch aus dem Integrale die Combinationen, welche zweimal dasselbe Element enthalten, fort. Da somit die Beibehaltung oder Ausschliessung dieser Combinationen den Werth des Integrals nur um eine unendlich kleine Grösse ändern kann, so dürfen wir das Integral als den richtigen Ausdruck des Potentials betrachten, ohne auf die Frage, ob diese Combinationen eigentlich in das Potential gehören oder nicht, einzugehen.

§. 43.

Mit Hülfe der so definirten Potentiale lassen sich nun die Arbeitsgrössen auf folgende Weise darstellen.

Wenn ein Agens, dessen Theile beweglich sind, seien diese Theile nun in einzelnen Puncten concentrirt, oder durch einen Raum stetig verbreitet, sich unter dem Einflusse eines festen Agens bewegt, so wird die Arbeit, welche dabei von den Kräften des letzteren gethan wird, dargestellt durch die Zunahme des Potentials des festen Agens auf das bewegliche. Bezeichnen wir also dieses Potential wie oben mit W', und seinen Anfangswerth mit W'_0, so ist die Arbeit:

$$W' - W'_0 .$$

Ebenso wird die Arbeit derjenigen Kräfte, welche die Theile des beweglichen Agens auf einander ausüben, dargestellt durch die Zunahme des Potentials des beweglichen Agens auf sich selbst, welches oben mit W bezeichnet wurde, und der Ausdruck für diese Arbeit ist daher:

$$W - W_0 .$$

Wenn man endlich beide Arten von Kräften berücksichtigen will, so muss man auch beide Potentiale anwenden, und erhält als Ausdruck der Arbeit:

$$W + W' - (W + W')_0 .$$

In diesem Falle kann man die Sache aber auch noch anders ausdrücken. Denkt man sich nämlich noch das Potential des festen Agens auf sich selbst gebildet, welches W'' heissen möge, so ist die Summe $W + W' + W''$ das Potential des gesammten Agens, des festen und beweglichen zusammen, auf sich selbst. Bei der Bewegung des beweglichen Agens bleibt nun das Potential W'' des festen Agens auf sich selbst unverändert, und der Ausdruck für die Arbeit ändert daher seinen Werth nicht, wenn man dieses Potential darin mit aufnimmt, und schreibt:

$$W + W' + W'' - (W + W' + W'')_0 .$$

Wenn man also das feste und bewegliche Agens zusammen als ein Ganzes betrachtet, und dessen Potential auf sich selbst bildet, so stellt die Zunahme dieses Potentials die Arbeit aller wirksamen Kräfte dar.

§. 44.

Schliesslich müssen noch über die Rolle, welche das Potential bei Untersuchungen über das Gleichgewicht spielt, einige Worte hinzu gefügt werden.

Es ist im Obigen gesagt, dass es zum Gleichgewichte nothwendig und hinreichend sei, dass bei jedem Systeme von virtuellen Bewegungen die von den wirksamen Kräften gethane Gesammtarbeit ein unendlich Kleines von höherer Ordnung oder negativ ist. Wenn nun die wirksamen Kräfte der Art sind, dass ihre Arbeit durch die Zunahme eines Potentials dargestellt wird, wobei eine Abnahme des Potentials als negative Zunahme zu rechnen ist, so lautet jene Bedingung: für jedes System von virtuellen Bewegungen muss die Veränderung des Potentials entweder ein unendlich Kleines von höherer Ordnung sein, oder in einer Abnahme bestehen.

Auch hier entsteht daraus, dass die Veränderungen, welche unendlich klein von höherer Ordnung sind, sowohl positiv als negativ sein, d. h. in Zunahme oder Abnahme des Potentials bestehen können, der Unterschied des stabilen und labilen Gleichgewichtes. Wenn für alle Systeme von virtuellen Bewegungen nur negative Veränderungen des Potentials möglich sind, so ist der Werth des Potentials ein Maximum; wenn nur positive Aenderungen vorkommen, so ist er ein Minimum; wenn endlich bei einigen Systemen von virtuellen Bewegungen die Veränderungen negativ und bei anderen positiv sind, so ist der Werth des Potentials weder allgemein ein Maximum noch allgemein ein Minimum. Daran schliesst sich nun der beim Gleichgewichte vorkommende Unterschied in folgender Weise an. Der Fall, wo das Potential ein Maximum ist, entspricht dem stabilen, und der Fall, wo das Potential ein Minimum ist, dem labilen Gleichgewichte, während in solchen Fällen wo das Potential weder allgemein ein Maximum noch allgemein ein Minimum ist, auch das Gleichgewicht weder vollständig stabil noch vollständig labil ist.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.